59. Darstellungswechsel

Natürlich ist es möglich eine Ebene, die in einer bestimmten Form gegeben ist in die beiden anderen Darstellungsformen umzuwandeln:

$$\begin{array}{ll} E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 & \text{(Parameterform)} \\ E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 & \text{(Normalenform)} \\ E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d & \text{(Koordinatenform)} \end{array}$$

Umwandlung Parameterform in Normalenform:

$$\left. \begin{array}{l} E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \\ E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \text{der Vektor } \vec{p} \text{ ist bereits gegeben!}$$

Berechnung des Vektors $\vec{n}$ mithilfe des Kreuzproduktes! $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}$

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

Wandel in die Normalenform um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Parameterform in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1. \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}$$

2. Einsetzen in Rohbau der Koordinatenform:

3. $\vec{p}$ (von Parameterform) für x , y und z einsetzen und d berechnen:

Aufgabe:

Wandel in die Koordinatenform um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenform in Parameterform

$$\begin{aligned} E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ E: \vec{x} &= \vec{p} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ E: \vec{x} &= \vec{p} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2 \end{aligned}} \right\} \text{der Vektor } \vec{p} \text{ ist bereits gegeben!}$$

Um die fehlenden Richtungsvektoren zu berechnen, benutzt du den Normalenvektor und suchst zwei Lösungen der Gleichung: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$
Dabei sind die Lösungen für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die gesuchten Richtungsvektoren der Parameterform.

Beispiel:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$\uparrow$
 $\vec{n}$

Hinweis: Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache und auch nicht der Nullvektor sein. Wenn das der Fall ist, ermittle eine andere Vektoren, in dem du andere Zahlen frei setzt!

Aufgabe:

Wandel in die Parameterform um:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform in Normalenform

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Beispiel:

$$2x + 3y - 1z = 4$$

Aufgabe:

Wandel in die NF um:

$$x + 2y - z = 2$$

Koordinatenform in Parameterform

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2$$

Hierzu suchst du drei Lösungen der Koordinatenform. Diese Lösungen sind Punkte, die auf der Ebene liegen und mithilfe der du anschließend die Parameterform aufstellen kannst!

Beispiel:

$$x + 2y - 4z = 10$$

$$1.) y=1 \text{ \& } z=1:$$

$$2.) x=2 \text{ \& } y=1:$$

$$3.) y=2 \text{ \& } z=0:$$

→ Parameterform aufstellen: $E: \vec{x} = \vec{OP}_1 + s \cdot \vec{P_1P_2} + t \cdot \vec{P_1P_3}$

→ Parameterform:

Hinweis: Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache sein.
Wenn das der Fall ist, ermittle einen anderen Punkt, in dem du andere Zahlen frei setzt!

Aufgabe:

Wandel in die NF um:

$$2x + 3y - z = 4$$

Normalenform in Koordinatenform

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

) ausmultiplizieren

Beispiel:

$$(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe:

Wandel in die KF um:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe:

Wandel die Parameterform in beide anderen Darstellungsformen um:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$