29. Flächeninhalte

Mit x-Achse:

Mithilfe des Integrals lässt sich der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse exakt rechnerisch bestimmen. Hier musst du immer im Vorfeld die Nullstellen berechnen. Wenn du keinen Bereich in der Aufgabenstellung gegeben hast, dann sind die Nullstellen die Grenzen. Und es gilt:

Anzahl an Nullstellen -1 = Anzahl an Integralen

Wenn du einen Bereich (wie in diesem Beispiel) gegeben hast, dann musst du diesen genau dann aufteilen, wenn eine Nullstelle in diesem Bereich liegt, andernfalls nicht!

Beispiel:

$f(x) = -x^2+4$ in $x \in [0;3]$

1) $-x^2+4=0 \quad |-4$

$-x^2=-4 \quad |:(-1)$

$x^2=4 \quad |\sqrt{\;}$ $\longrightarrow$ $x_1=-2$ (nicht relevant)

$x_2=2$

2) $[0;3] \longrightarrow [0;2] \cup [2;3]$

3) $A_1: \int_0^2 -x^2+4\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^3+4x \Big|_0^2$

$= -\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-(-\frac{1}{3}\cdot 0^3+4\cdot 0)$

$= -\frac{1}{3}\cdot 8+8-(0)$

$= -\frac{8}{3}+\frac{24}{3}=\frac{16}{3}$

$A_2: \int_2^3 -x^2+4\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^3+4x \Big|_2^3$

$= \left|-\frac{1}{3}\cdot 3^3+4\cdot 3-(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2)\right|$

$= \left|-\frac{1}{3}\cdot 27+12-(-\frac{8}{3}+8)\right|$

$= \left|-9+12+\frac{8}{3}-8\right|$

$= \left|-5+\frac{8}{3}\right| = \left|-\frac{15}{3}+\frac{8}{3}\right|$

$= \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$

4) $A_{ges} = A_1+A_2 = \frac{16}{3}+\frac{7}{3} = \frac{23}{3}$ FE

Schritte:

1.) Nullstellen berechnen
2.) Wenn nötig, Bereich in Intervalle aufteilen
3.) Integrale berechnen
→ wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Einzelne Flächeninhalte addieren

FE bedeutet Flächeneinheiten. Dies kannst du als Einheit verwenden, wenn keine in der Aufgabenstellung angegeben ist!

Zwischen zwei Funktionen:

Mithilfe des Integrals lässt sich nicht nur der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse, sondern ebenfalls der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen bestimmen! Hierbei sind nicht mehr die Nullstellen, sondern die Schnittstellen dieser beiden Funktionen entscheidend. Ins Integral kommt die Differenz dieser beiden Funktionen. Auch hier gilt: Ein Flächeninhalt kann nicht negativ sein. Liefert das Integral ein negatives Ergebnis, dann setze den Betrag!

Beispiel:

$f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = x + 2$

1.) $f(x) = g(x)$: $x^2 + x + 1 = x + 2 \quad | -x \quad | -1$

$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$\underset{\uparrow b}{x_1 = 1}$ und $\underset{\uparrow a}{x_2 = -1}$

2.) $f(x) - g(x) = x^2 + x + 1 - (x+2) = x^2 + x + 1 - x - 2$

$= x^2 - 1$

3.) $\int_{-1}^{1} x^2 - 1 \, dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 1x\right]_{-1}^{1}$

$= \left|\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 \cdot 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 1 \cdot (-1)\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1\right|$

$= \left|\frac{2}{3} - 2\right|$

$= \left|\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right|$

$= \left|-\frac{4}{3}\right|$

$= \frac{4}{3}$ FE

Schritte:

1.) Schnittstelle(n) berechnen
2.) f(x)-g(x) bilden
3.) Integral(e) berechnen
wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Wenn mehrere Integrale: Einzelne Flächeninhalte addieren

Aufgabe:

Berechne den Flächeninhalt zwischen

$f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = -2x + 1$

Übung:

siehe Meeting!

$f(x) = x^2$

$g(x) = -x^2 + 2$ in $x \in [0;2]$

Mehr als zwei Schittstellen mit x-Achse:

Wenn die Funktion mehr als zweimal die waagerechte x-Achse schneidet, dann brauchst du mehr als ein Integral zur Flächenberechnung. Es gilt:

"Anzahl an Nullstellen"-1="Anzahl an Integrale"

Das erste Integral geht dann von der kleinsten bis zur nächstgrößeren Nullstelle. Das nächste Integral, dann von dieser bis zur wiederum größeren Nullstelle, usw.

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 4x$

1) $f(x)=0$: $x^3-4x=0 \mid ()$

$x(x^2-4)=0 \mid SvNP$

$x_1=0$ $\quad$ $x^2-4=0 \mid +4$

$x^2=4 \mid \sqrt{\ }$

$x_2=2$ und $x_3=-2$

2) $[-2;0] \cup [0;2]$

3) $A_1: \int_{-2}^{0} x^3-4x\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4-2x^2 \Big|_{-2}^{0}$

$= \frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - 2\cdot(-2)^2\right)$

$= 0-(4-8)$

$= 0-(-4)$

$= 4$ FE

$A_2: \int_{0}^{2} x^3-4x\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4-2x^2 \Big|_{0}^{2}$

$= \left|\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2\right)\right|$

$= |4-8-(0)|$

$= |-4|$

$= 4$ FE

4) $A_{ges} = A_1 + A_2 = 4\text{FE} + 4\text{FE}$

$= 8$ FE

Schritte:

1.) Nullstellen berechnen
2.) Wenn nötig, Bereich in Intervalle aufteilen
3.) Integrale berechnen
→wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Einzelne Flächeninhalte addieren

Übung:

Die Tangente an $f(x)=x^3-8x^2+15x$ im Punkt $B(1|8)$ schließt mit $f(x)$ und der x-Achse ein. Bestimme den entstehenden Flächeninhalt.

siehe Meeting!