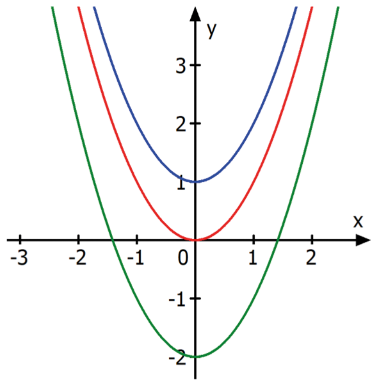
18. Funktionsscharen

Was sind Funktionsscharen?

Eine Funktionktionsschar ist eine Funktionsvorschrift, die unendlich viele Funktionen repräsentiert! Dabei ist der Parameter (hier a) ein Platzhalter für unendlich viele Zahlen.

$f_a = x^2 + a,\ a \in \mathbb{R}$



z.B $a = 0 \rightarrow f_0(x) = x^2 + 0 = x^2$

$a = 1 \rightarrow f_1(x) = x^2 + 1$

$a = -2 \rightarrow f_{-2}(x) = x^2 - 2$

Diese Funktionen lassen sich zusammenfassen mit: $f_a(x) = x^2 + a$

Der Scharparameter

Der Scharparameter ist ein Platzhalter für eine Zahl.
Eine Variable ist nicht dasselbe wie ein Scharparameter.

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Nullstellen
- Y-Achsenschnittstelle
- Grenzwertverhalten
- Symmetrie
- Ableitungen
- Extrema
- Wendepunkt
- Monotonie
- Krümmung

Genauso berechnen wie ohne einen Parameter! Den Parameter wie eine Zahl behandeln!

Die Fallunterscheidung

Wenn der Parameter a aus den reellen Zahlen stammt, dann brauchst du manchmal eine Fallunterscheidung, da der Parameter sowohl positiv, negativ, als auch Null sein kann! Dies ist besonders häufig bei der Extremaberechnung in der hinreichenden Bedingung der Fall!

Beispiel

$f_a(x) = x^3 - 3ax^2 + 2$; $a \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $f_a'(x) = 3x^2 - 6ax$; $f_a''(x) = 6x - 6a$

notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$

$3x^2 - 6ax = 0 \quad |()$

$x \cdot (3x - 6a) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1 = 0$

$3x - 6a = 0 \quad |+6a$

$3x = 6a \quad |:3$

$x = 2a$

hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0$ & $f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(0) = 6 \cdot 0 - 6a = 0 - 6a = -6a$

$f_a''(2a) = 6 \cdot 2a - 6a = 12a - 6a = 6a$

F.U.

$a<0$	$a=0$	$a>0$
pos → TP	= 0 → SP	neg → HP
neg → HP	= 0 → SP	pos → TP

y-Koordinaten:

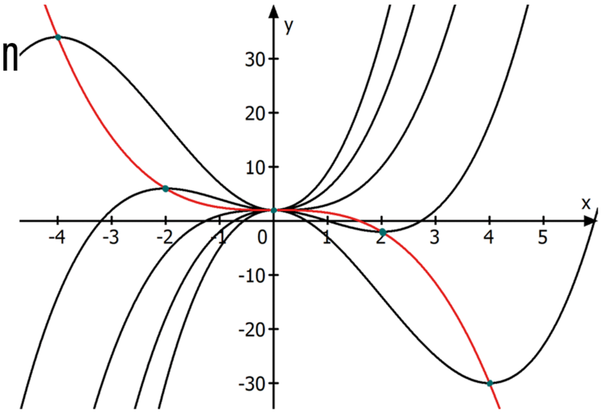
$f_a(0) = 0^3 - 3a \cdot 0^2 + 2 = 2 \longrightarrow EP1(0|2)$

$f_a(2a) = (2a)^3 - 3a \cdot (2a)^2 + 2 = 8a^3 - 3a \cdot 4a^2 + 2$

$= 8a^3 - 12a^3 + 2 = -4a^3 + 2 \longrightarrow EP2(2a|-4a^3+2)$

Die Ortskurve

Die Ortskurve ist diejenige Kurve, die die charakteristischen Punkte einer Schar, wie zum Beispiel die Tiefpunkte miteinander verbindet. Genauso kann man eine Ortskurve für die Hochpunkte, die Wendepunkte oder aber für die Sattelpunkte aufstellen. Das Vorgehen ist immer das Gleiche!



Beispiel: $EP_a(2a \mid -4a^3+2)$

1) $2a = x \quad |:2$

2) $a = \frac{1}{2}x$

3) $o(x) = -4 \cdot (\frac{1}{2}x)^3 + 2$

4) $= -4 \cdot \frac{1}{8}x^3 + 2$

$= -\frac{4}{8}x^3 + 2$

$= -\frac{1}{2}x^3 + 2$

Schritte:

1.) x-Koordinate gleich x setzen
2.) nach dem Parameter auflösen
3.) in y-Koordinate einsetzen
4.) vereinfachen

Übung: $f_k(x) = x^2 + k \cdot x + 4$ → Ortskurve der Tiefpunkte

Siehe Meeting!

Gemeinsame Punkte

Zu Beginn musst du zwei verschiedene Teilfunktionen dieser Schar bilden und diese gleichsetzen (s. Schnittpunkte von zwei Funktionen)! Im nächsten Schritt vereinfachst du diese Gleichung, in dem du die Potenz(en) von x ohne einen Scharparameter und die reinen Zahlen wegrechnest. Nun bringst du alles mit einem Parameter auf die eine Seite des Gleichheitszeichens und alles ohne auf die andere Seite. Jetzt hilft dir in der Regel die Ausklammernmethode . Nachdem du die Schnittstellen berechnet hast, vergesse nicht die y-Koordinate zu ermitteln.

Beispiel:

$f_a(x) = x^3 - 9ax^2 + 2 + a,\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a_1 \neq a_2$

1.) $x^3 - 9a_1x^2 + 2 + a_1 = x^3 - 9a_2x^2 + 2 + a_2 \quad | -x^3$

2.) $-9a_1x^2 + 2 + a_1 = -9a_2x^2 + 2 + a_2 \quad | -2$

$-9a_1x^2 + a_1 = -9a_2x^2 + a_2 \quad | -a_1$

3.) $-9a_1x^2 = -9a_2x^2 - a_1 + a_2 \quad | +9a_2x^2$

$-9a_1x^2 + 9a_2x^2 = -a_1 + a_2$

4.) $x^2(-9a_1 + 9a_2) = -a_1 + a_2 \quad | :(-9a_1 + 9a_2)$

$x^2 = \frac{-a_1 + a_2}{-9a_1 + 9a_2}$

$x^2 = \frac{\cancel{-a_1 + a_2}}{9 \cdot \cancel{(-a_1 + a_2)}}$

$x^2 = \frac{1}{9} \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$

5.) $f_a\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 + a$

$= \frac{1}{27} - 9a \cdot \frac{1}{9} + 2 + a$

$= \frac{1}{27} - 1a + 2 + a$

$= \frac{1}{27} + 2 = \frac{1}{27} + \frac{54}{27} = \frac{55}{27} \longrightarrow SP1\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{55}{27}\right)$

$f_a\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 9a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 + a$

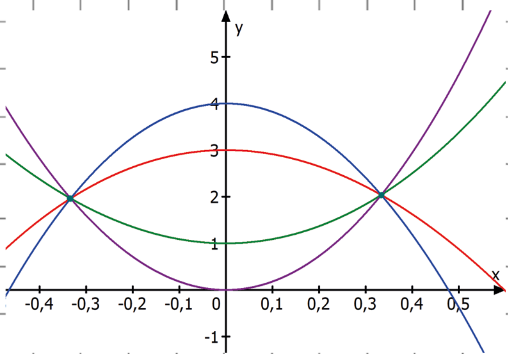
$= -\frac{1}{27} - 9a \cdot \frac{1}{9} + 2 + a$

$= -\frac{1}{27} - 1a + 2 + a$

$= -\frac{1}{27} + 2 = -\frac{1}{27} + \frac{54}{27} = \frac{53}{27} \longrightarrow SP2\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{53}{27}\right)$

Schritte:

1.) $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ bilden
2.) reine xe und Zahlen wegrechnen
3.) Alles mit x nach links vom Gleichheitszeichen und alles ohne nach rechts
4.) Nach x auflösen
5.) y-Koordinate



Übung:

$f_a(x) = x^2 + ax + a - 1$

siehe Meeting!

Aufgabe:

Gegeben ist die Funktionsschar:

$f_a(x) = 4x^2 + 8ax + 4 \quad$ mit $a \in \mathbb{R}$

Berechne 1. Die Nullstellen in Abhängigkeit von a

2. Die Extrema in Abhängigkeit von a

3. Für welche Werte von a liegen die Extrema auf der y-Achse?

4. Für welche Werte von a liegen die Extrema auf der x-Achse?