

75. Hypothesentest

Mit Sigma-Regeln

Schritte:

1. Hypothesen H_0 und H_1 aufstellen
2. Entscheiden welcher Test vorliegt

	H_0 -Hypothese	H_1 -Hypothese
Rechtsseitiger Test	$H_0: p \leq p_0$	$H_1: p > p_0$
Linksseitiger Test	$H_0: p \geq p_0$	$H_1: p < p_0$
Beidseitiger Test	$H_0: p = p_0$	$H_1: p \neq p_0$
		↑ H_1 entscheidet

3. Erwartungswert und Standardabweichung
4. Irrtumswahrscheinlichkeit

α	10 %	5 %	2,5 %	1%
Z_α	1,28	1,64	1,96	2,33

5. Entscheidungsregel aufstellen

Rechtsseitiger Test $\bar{A} = [\mu + Z_\alpha \cdot \sigma ; n]$

Linksseitiger Test $\bar{A} = [0 ; \mu - Z_\alpha \cdot \sigma]$

Beidseitiger Test $A = [\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma ; \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma]$

Fehler beim Testen

	H_0 angenommen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	Sicherheit 1. Art	Fehler 1. Art / α -Fehler
H_0 falsch	Fehler 2. Art / β -Fehler	Sicherheit 2. Art

Berechnung der Fehler:

Fehler 1. Art: WK vom Ablehnungsbereich

Fehler 2. Art: WK vom Annahmebereich mit neuem (gegebenen) p

Beispiel:

Es werden Fußballfans in Dortmund nach ihrem Lieblingsverein gefragt.

Ich behaupte 80% der dortmunder Fans sind Anhänger des BVB.

Es werden 100 Fans befragt (Signifikanzniveau 5%).

In dieser Stichprobe sind 70 Fußballfans Fan des BVB.

a) Habe ich recht?

b) Berechne außerdem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. & 2. Art, wenn der tatsächliche Anteil 85% beträgt.

a)

1.) $H_0: p=0,8$; $H_1: p \neq 0,8$

2.) Beidseitiger Test

3.) $\mu = 100 \cdot 0,8 = 80$, $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 4$

4.) $\alpha=5\%$

Irrtumswahrscheinlichkeit: $5\%=0,05$

Sicherheitswahrscheinlichkeit: $1-\alpha=1-0,05=0,95$

Beidseitiger Test:

5.)

$$A = [\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma] = [\mu - z_{2,5} \cdot \sigma; \mu + z_{2,5} \cdot \sigma] \text{ mit } z_{2,5} = 1,96$$

$$= [80 - 1,96 \cdot 4; 80 + 1,96 \cdot 4]$$

$$= [72,16; 87,84]$$

↓ auf. ↙ abrunden

$$= [73; 87] \quad \rightarrow \bar{A} = [0; 72] \cup [88; 100]$$

$\rightarrow 70 \in \bar{A} \rightarrow$ Ich hatte Unrecht!

b) Fehler 1. Art \Rightarrow Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereiches

$$P(x \leq 72) \& P(88 \leq x \leq 100) =$$

Fehler 2. Art: $n=100$; $p=0,85$

$$P(73 \leq x \leq 87) = 0,75$$

Ohne Sigma-Regeln

Beidseitiger Test:

1. H_0 und H_1 festlegen
2. Entscheiden welcher Test (Lage von H_1 entscheidet)
3. Erwartungswert berechnen
4. Annahmereich berechnen mit:
$$P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2} \text{ und } P(X \leq b) > 100\% - \frac{\alpha}{2} \rightarrow A = [a; b]$$
5. Ablehnungsbereich angeben
6. Entscheidungsregel angeben:
„ H_0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmereich, also in ... liegt, andernfalls verworfen.“

Beispiel:

70% Haselnüsse

In einer Nussmischung sind Haselnüsse und Walnüsse. Die Mischung soll 30% Walnüsse enthalten. Bei einem Abfüllprozess soll eine Maschine pro Tüte 50 Nüsse abfüllen, Peter greift 2 Tüten heraus und stellt fest, dass darin 80 Haselnüsse enthalten sind. Entscheide auf einem Signifikanzniveau von 5%, ob man die Behauptung „30% Walnüsse“ aufrecht halten kann.

1. $H_0: p = 0,7$

$H_1: p \neq 0,7$

2. beidseitig

3. $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,7 = 70$

4. $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2} \rightarrow P(X \leq a) > 0,025 \rightarrow a = 60$

$P(X \leq b) > 100 - \frac{\alpha}{2} \rightarrow P(X \leq b) > 0,975 \rightarrow b = 80$

5. $A = [60; 80]$ $\bar{A} = [0; 59] \cup [81; 100]$

Linksseitiger Test:

1. H_0 und H_1 festlegen
2. Entscheiden welcher Test (Lage von H_1 entscheidet)
3. Erwartungswert berechnen
4. Annahmereich berechnen mit:
$$P(X \leq a) > \alpha \rightarrow A = [a; n]$$
5. Ablehnungsbereich angeben
6. Entscheidungsregel angeben:
„ H_0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmereich, also in ... liegt, andernfalls verworfen.“

Beispiel:

Ein Restaurant gibt an, dass 40% der Besucher eine Pizza bestellen. Nach einem Wechsel des Bäckers vermutet der Geschäftsinhaber, dass es nun weniger sind. Bei einer Umfrage unter 100 Besuchern geben 33 an, dass sie eine Pizza bestellen. Ist es möglich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%, dass die Anzahl der Pizzaliebhaber gesunken ist?

$$1. \begin{aligned} H_0: & p \geq 0,4 \\ H_1: & p < 0,4 \end{aligned}$$

2. links

$$3. \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,4 = 40$$

$$4. P(X \leq a) > \alpha \rightarrow P(X \leq a) > 0,05 \rightarrow a = 32$$

$$5. A = [32; 100]$$

$$\bar{A} = [0; 31]$$

Rechtsseitiger Test:

1. H_0 und H_1 festlegen
2. Entscheiden welcher Test (Lage von H_1 entscheidet)
3. Erwartungswert berechnen
4. Annahmereich berechnen mit:

$$P(X \leq b) > 1 - \alpha \rightarrow A = [0; b]$$

5. Ablehnungsbereich angeben
6. Entscheidungsregel angeben:
„ H_0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmereich, also in ... liegt, andernfalls verworfen.“

Beispiel:

Alberto behauptet, dass mehr als 75% der Menschen Pizza lieben. Sein Vater denkt, dass Alberto unrecht hat und es in Wirklichkeit höchstens 75% sind. Es werden 100 Menschen befragt (Signifikanzniveau 5%).

1. $H_0: p \leq 0,75$
 $H_1: p > 0,75$

2. $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,75 = 75$

3. rechtsseitig

4. $P(X \leq b) > 1 - \alpha$

$$P(X \leq b) > 0,95$$

$$P(X \leq 80) = 0,9005$$

$$P(X \leq 82) = 0,9624$$

$$P(X \leq 81) = 0,937$$

5. $\rightarrow A = [0; 82]$

$$\bar{A} = [83; 100]$$