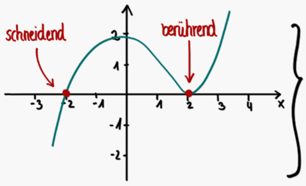
1. Differentialrechnung

1. Nullstellen:

Die Nullstellen sind diejenigen Stellen, die eingesetzt in die Funktion den Funktionswert (=y-Koordinate/Ergebnis) Null liefern.

$\rightarrow f(x) = x^2 - 4x - 1 \quad : f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ ist eine Nullstelle!



$x = -2$ ist eine einfache und $x = 2$ eine doppelte Nullstelle!

Wann, welches Verfahren (ganzrationale Funktionen):

- Hat die vorliegende Funktion mehr als eine Potenz?
  - Ja → Verfahren! Hat die Funktion ein Absolutglied?
    - Ja → Ist die höchste Potenz eine hoch 2?
      - Ja → pq-Formel, abc-Formel
      - Nein → Ist jeder höhere Exponent ein ganzes Vielfaches des kleinsten und dieser mind. eine 2?
        - Ja → Substitutionsmethode
        - Nein → Polynomdivision, Hornerschema, GTR
    - Nein → Ausklammern
  - Nein → kein Verfahren (nach x umformen)

Schritte:

1. pq-Formel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) "Normieren"
3.) p und q herauslesen
4.) In Formel einsetzen
5.) Vereinfachen

2. abc-Formel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) a, b und c bestimmen
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

3. Ausklammern:

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) kleinste Potenz ausklammern
3.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

4. Substitutionsmethode

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2. kleinste Potenz substituieren (gleich z setzen) und jede höhere Potenz durch z ersetzen.
3.) Neue Gleichung lösen
4.) Resubstituieren
5.) Wenn möglich entsprechende Wurzel ziehen

e-Funktion:

Beispiel: $f(x) = (2x - 10) \cdot e^{x^2+1}$

1. $(2x-10) \cdot e^{x^2+1} = 0 \quad |$ SvNP
2. $2x - 10 = 0 \quad |+10 \qquad e^{x^2+1} \neq 0$
3. $2x = 10 \quad |:2$

$x = 5 \longrightarrow f(x)$ hat eine Nullstelle bei $x = 5$!

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wichtig: $e^{\text{irgendwas}} \neq 0$

Beispiel: $f(x) = 2e^{x^2-9} - 2$

1. $2e^{x^2-9} - 2 = 0 \quad |+2$
2. $2e^{x^2-9} = 2 \quad |:2$
   $e^{x^2-9} = 1 \quad |\ln$
3. $x^2 - 9 = 0 \quad |+9$
4. $x^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$
   $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

f(x) hat zwei Nullstellen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach e-Funktion auflösen
3.) Wenn mögl. ln anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wurzel-Funktion:

Beispiel: $f(x) = (-x+1) \cdot \sqrt{4x-8} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 2}$

1. $(-x+1) \cdot \sqrt{4x-8} = 0 \quad |$ SvNP
2. $-x+1 = 0 \quad |-1 \qquad \sqrt{4x-8} = 0 \quad |^2$
3. $-x = -1 \quad |\cdot(-1) \qquad 4x - 8 = 0 \quad |+8$
   $x = 1 \qquad 4x = 8 \quad |:4$
   nicht def. $\qquad x = 2$
4. $f(2) = (-2+1) \cdot \sqrt{4 \cdot 2 - 8} = -1 \cdot \sqrt{0} = 0$ ✓
   f(x) hat eine Nullstelle bei x=2

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen
4.) Probe

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} + 9 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 1}$

1. $3 \cdot \sqrt{x-1} + 9 = 0 \quad |-9$
2. $3 \cdot \sqrt{x-1} = -9 \quad |:3$
   $\sqrt{x-1} = -3 \quad |^2$
3. $x - 1 = 9 \quad |+1$
4. $x = 10$
5. $f(10) = 3 \cdot \sqrt{10-1} + 9 = 3 \cdot 3 + 9 = 18$ ↯
   f(x) hat keine Nullstellen!

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Wurzel auflösen
3.) quadrieren
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, lösen
5.) Probe

ln-Funktion:

Beispiel: $f(x) = x \cdot \ln(x-3) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>3}$

1. $x \cdot \ln(x-3) = 0 \quad |$ SvNP
2. $x = 0 \qquad \ln(x-3) = 0 \quad |e$
3. nicht def. $\qquad x - 3 = 1 \quad |+3$
   $x = 4$

f(x) hat eine Nullstelle bei x=4!

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot \ln(x^3 - 7) - 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>\sqrt[3]{7}}$

1. $2 \cdot \ln(x^3-7) - 2 = 0 \quad |+2$
2. $2 \cdot \ln(x^3-7) = 2 \quad |:2$
   $\ln(x^3-7) = 1 \quad |e$
3. $x^3 - 7 = e^1 \approx 2{,}7 \quad |+7$
4. $x^3 = 9{,}7 \quad |\sqrt[3]{\ }$
   $x \approx 2{,}1$

f(x) hat eine Nullstelle bei $x \approx 2{,}1$!

Schritte:
1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach ln-Funktion auflösen
3.) e anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Bei gebrochenrationalen Funktionen Zähler gleich Null setzen und lösen