Einfach Mathe

Deine Online-Lernplattform

DAS

Einfach Mathe!

Abitur-Skript

ANALYSIS

Grundkurs

Grundkurs | NRW

VORWORT

Zunächst einmal möchte ich mich bei dir für dein Vertrauen bedanken und dich dazu beglückwünschen, dass du dich für dieses Skript entschieden hast!

Bei diesem Skript handelt es sich nämlich nicht um ein klassisches, mathematisches Nachschlagewerk, welches in der Regel in vielen Regalen verstaubt, sondern wird dich bei deiner Abivorbereitung im Bereich der Analysis unterstützen. Um einen optimalen Lernfortschritt zu erzielen, möchte ich dich dazu ermutigen aktiv mit diesem Skript zu arbeiten, denn du findest neben den verständlichen Erklärungen zum Nachlesen, verlinkte Beispielvideos, die zu einem tieferen Verständnis führen sollen. Außerdem gibt es in diesem Skript eine große Anzahl an Übungsaufgaben, die du gewissenhaft bearbeiten solltest! Am Ende des Skriptes findest du die Lösungen der Aufgaben zum Nachlesen und exklusive Lösungsvideos in denen ich nochmals den einen oder anderen Tipp für dich vorbereitet habe.

Ein optimaler Übungsablauf sieht in meinen Augen folgendermaßen aus:

1. Kapitel durchlesen
2. Beispielvideo(s) anschauen
3. Übungsaufgabe(n) lösen
4. Mit Musterlösung vergleichen
5. Lösungsvideo anschauen

Eine Übersicht über alle Videos findest du hier:

https://einfachmathe.com/courses/analysis-gk-skript-digital/
Passwort: ana gk skript

Alternativ kannst du diesen QR-Code ganz einfach mit deinem Handy einscannen. Du wirst dann zur Videoseite weitergeleitet!

Scan me

Jetzt wünsche ich dir wie immer: „Viel Erfolg beim Lernen!“,
Deine Jenny

INHALT

1. Differentialrechnung:

2. Integralrechnung:

3. Anhang:

1. Wichtige Funktionstypen

Ganzrationale Funktionen

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Eine Funktion wird als ganzrationale Funktion oder Polynomfunktion bezeichnet, wenn die Funktionsvorschrift ein Polynom ist!

→ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ nennt man Koeffizienten
→ $n, n-1, \ldots$ nennt man Exponenten
→ der höchste Exponent bestimmt den Grad der Funktion
→ der Koeffizient vor dem höchsten Exponenten heißt Leitkoeffizient
→ a_0 ist das sogenannte Absolutglied

→ $n=3$ → $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ (z.B. $4x^3-2x^2+5x+1$) → allgemeine Darstellung einer Funktion 3. Grades = kubische Funktion

→ $n=2$ → $a_2x^2+a_1x+a_0$ (z.B. $-x^2-5x+10$) → allgemeine Darstellung einer Funktion 2. Grades = quadratische Funktion

→ $n=1$ → a_1x+a_0 (z.B $4x+5$) → allgemeine Darstellung einer Funktion 1. Grades = lineare Funktion

→ $n=0$ → a_0 (z.B 6) → allgemeine Darstellung einer Funktion 0.Grades = konstante Funktion

Beispiel

Grad 3
Leitkoeffizient
Exponenten
Absolutglied

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x^1 + 1$$

Koeffizienten

Gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \quad \text{mit } n(x) \neq 0$$

Bei einer gebrochenrationalen Funktion sind z(x) und n(x) Polynome. z(x) ist dasjenige Polynom, welches im Zähler des Bruches steht und n(x) dementsprechend das Polynom im Nenner!

- Gebrochenrationale Funktionen können Einschränkungen im Definitionsbereich haben.

- Eine gebrochenrationale Funktion hat genau dann Nullstellen, wenn der Zähler Nullstellen besitzt.

  $\longrightarrow$ $z(x) = 0$ lösen

- Jede gebrochenrationale Funktion lässt sich als Produkt umschreiben (hilfreich für das Ableiten):

  $$\longrightarrow f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = z(x) \cdot (n(x))^{-1}$$

  $$f(x) = \frac{3x}{x+4} = 3x \cdot (x+4)^{-1}$$

Wurzelfunktionen

$$f(x) = \sqrt[n]{d(x)}$$

- Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen.

- n gibt an um welche Wurzel es sich handelt (=Wurzelexponent).

- Der Ausdruck unter der Wurzel wird als Diskriminante bezeichnet.

- Gerade Wurzelfunktionen können Einschränkungen im Definitionsbereich haben.

- Wurzelfunktionen lassen sich in die Potenzschreibweise überführen. Das ist besonders beim Ableiten hilfreich. Es gilt:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

z.B.: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

Exponentialfunktionen

$$f(x) = c \cdot a^x$$

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = c \cdot a^x \quad \text{mit } a>0 \text{ und } a \neq 1,\ c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

heißt Exponentialfunktion!

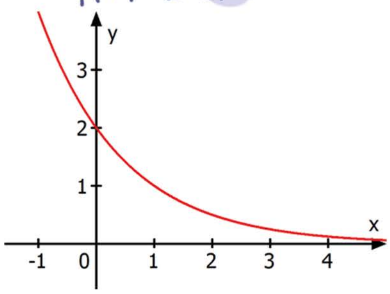
- In der Regel beschreiben Exponentialfunktionen Wachstumsprozesse und es gilt:

  $a>1 \longrightarrow$ exponentielle Zunahme

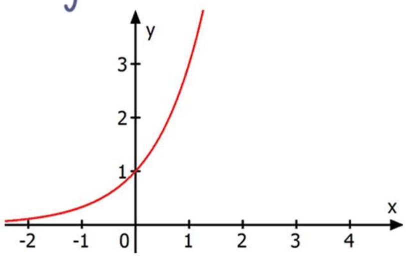
  $0<a<1 \longrightarrow$ exponentielle Abnahme

- Der Faktor a heißt Wachstumsfaktor.
- Der Faktor c gibt den Startwert bei x=0 (y-Achsenschnitt) an.

$f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$

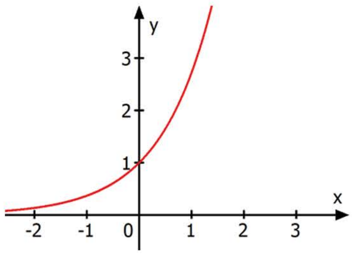


$g(x) = 1 \cdot 3^x$



Die spezielle Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ heißt natürliche Exponentialfunktion, wobei e ungefähr 2,71828 ist.

$$f(x) = e^x \xrightarrow{\text{ungefähr}} 2{,}71828^x$$



Es gilt: $f(x) = f'(x) = F(x) = e^x$

Jede Exponentialfunktion der Form $c \cdot a^x$ lässt sich in eine e-Funktion umwandeln:

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

$$f(x) = 3 \cdot 2^x = 3 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$$

Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion zur e-Funktion ist der natürliche Logarithmus.

Es gilt:

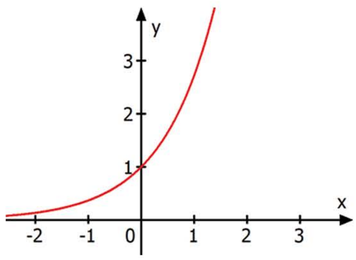
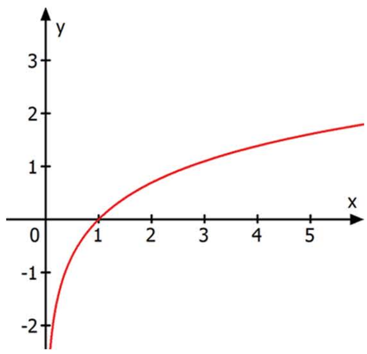
$$e^{\ln(a)} = a \longrightarrow e^{\ln(3)} = 3$$

$$\text{und} \quad \ln(e^{b}) = b \longrightarrow \ln(e^{2}) = 2$$

„ln und e heben sich also auf!“

Wissenswertes

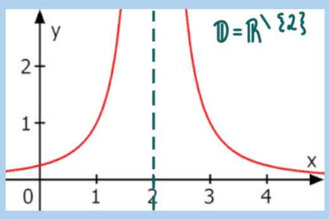
(Darauf wird in den folgenden Kapiteln konkreter eingegangen!)

	Natürliche Exponentialfunktion	Natürliche Logarithmusfunktion
Funktionsgleichung	$f(x) = e^{x}$	$g(x) = \ln(x)$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{>0}$
Wertebereich	$\mathbb{R}^{>0}$	$\mathbb{R}$
Globalverhalten	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$
Ableitung	e^{x}	$\frac{1}{x}$
Stammfunktion	$e^{x} + C$	$-x + x \cdot \ln(x) + C$
Nullstellen	keine	$x = 1$
y-Achsenschnitt	$y = 1$	keinen
Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton steigend
Krümmung	links	rechts
Graph		

2. Der Definitionsbereich

Was ist der Definitionsbereich?

Der Definitionsbereich gibt an, welche Zahlen man für die Variable in die Funktion einsetzen darf! Wenn du also die Aufgabe hast den Definitionsbereich zu bestimmen, dann ist der maximale Definitionsbereich gesucht, für den die Funktion ausführbar ist!



Welche Funktionstypen können Einschränkungen haben?

Bei den meisten Funktionen gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass du alle reellen Zahlen einsetzen darfst. Es gibt allerdings drei Funktionstypen, die Einschränkungen haben können:

1. Gerade Wurzelfunktionen: $\longrightarrow d(x) \geq 0$
   Die Diskriminante muss größer oder gleich Null sein!
2. Gebrochenrationale Funktionen: $\longrightarrow n(x) \neq 0$
   Der Nenner darf nicht Null sein!
3. Logarithmusfunktionen: $\longrightarrow a(x) > 0$
   Das Argument muss positiv sein!

Du achtest bei der Bestimmung des Definitionsbereiches darauf, ob ein Fall oder mehrere Fälle gegeben sind und dies entscheidet über dein Vorgehen:

gerade Wurzelfunktionen

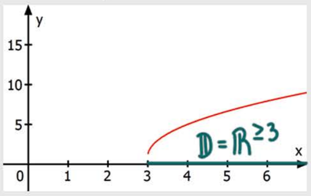
$f(x) = 2 \cdot \sqrt{\underbrace{4x - 12}_{d(x)}} + 1$

$\longrightarrow$ Die Diskriminante muss größer oder gleich Null sein!
$\longrightarrow d(x) \geq 0$

$$4x - 12 \overset{*}{\geq} 0 \quad | +12$$
$$4x \geq 12 \quad | :4$$
$$x \geq 3 \longrightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 3} = [3; +\infty[$$

*Ein solches Ungleichheitszeichen behandelst du wie ein normales =, es sei denn du multiplizierst oder dividierst mit bzw. durch eine negative Zahl, dann drehst du die Richtung um!

„Man darf alle reellen Zahlen einsetzen, die größer oder gleich 3 sind!"



Gebrochenrationale Funktionen

$f(x) = \frac{3+x}{\underbrace{x^2-4x}_{n(x)}}$ → Einschränkungen: Nullstellen des Nenners [Tipp: siehe Nullstellen-Kapitel]

→ $n(x) = 0$

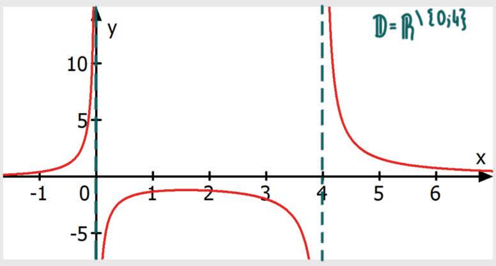
Ausklammern-Methode

$x^2 - 4x = 0 \quad |()$

$x(x-4) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1 = 0 \qquad x - 4 = 0 \quad |+4$

$x_2 = 4 \longrightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;4\}$ „ohne"



„Man darf alle reellen Zahlen einsetzen, außer die 0 und die 4!"

Logarithmusfunktionen

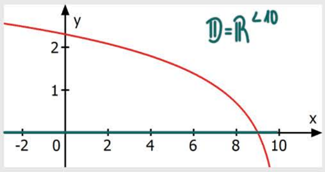
$f(x) = \ln(\underbrace{10-x}_{a(x)})$ → Das Argument muss größer Null sein!

→ $a(x) > 0$

$10 - x > 0 \quad |-10$

$-x > -10 \quad |:(-1)$

$x < 10 \longrightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^{<10} = \,]-\infty; 10[$



„Man darf alle reellen Zahlen einsetzen, die kleiner als 10 sind!"

Haben diese Funktionstypen immer Einschränkungen?

Nein! Bei gebrochenrationalen Funktionen gibt es zum Beispiel nur Einschränkungen, wenn der Nenner tatsächlich Nullstellen hat! Bei Wurzel- bzw. Logarithmusfunktionen nur dann, wenn die Diskriminante bzw. das Argument ≤ 0 oder < 0 werden können!

Aufgabe 1:

Bestimme den maximalen Definitionsbereich:

1. $f(x) = \frac{3x}{x^2+2x+1}$
2. $g(x) = \sqrt{25-x}$
3. $h(x) = \ln(-2x-2)$

Die Lösung findest du auf Seite 81.

3. Die Nullstellen

Was sind Nullstellen?

Die Nullstellen sind diejenigen Stellen, die eingesetzt in die Funktion den Funktionswert (=y-Koordinate/Ergebnis) Null liefern.

also x-Werte

Beispiele:

- $f(x) = 2x^2 - 8$

  $x = 1 \rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^2 - 8 = -6 \neq 0 \quad \rightarrow x = 1$ ist keine Nullstelle

  $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 = 0$ ✓ $\quad \rightarrow x = 2$ ist eine Nullstelle

- $f(x) = 2e^{-x-2} - 2$

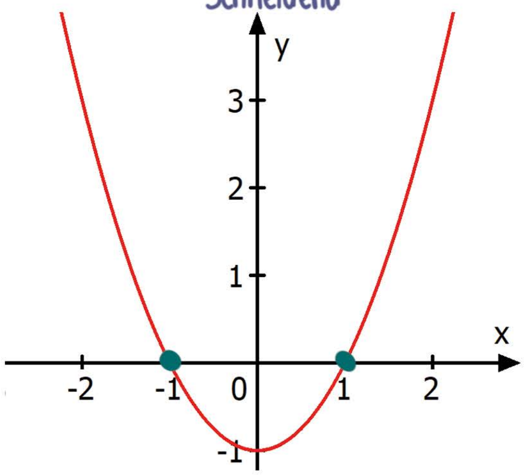
  $x = 1 \rightarrow f(1) = 2e^{-1-2} - 2 = 2e^{-3} - 2 \approx -1{,}9 \neq 0 \quad \rightarrow x = 1$ ist keine Nullstelle

  $x = -2 \rightarrow f(-2) = 2e^{-(-2)-2} - 2 = 2e^{0} - 2 = 0$ ✓ $\quad \rightarrow x = -2$ ist eine Nullstelle

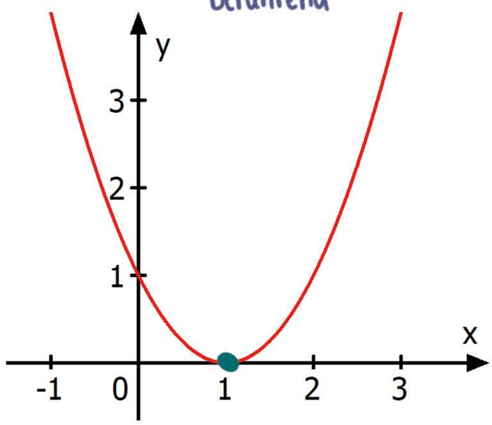
Graphische Bedeutung:

Graphisch gesehen sind die Nullstellen die Schnittstellen bzw. Berührstellen des zugehörigen Funktionsgraphen mit der waagerechten x-Achse.

schneidend



berührend



Tipp für ganzrationale Funktionen:
Der Grad einer Funktion gibt die maximale Anzahl an Nullstellen an, die diese Funktion haben kann!

zum Beispiel: $f(x) = 3x^2 + 4x - 1 \rightarrow$ Grad 2 $\rightarrow$ maximal 2 Nullstellen!

$g(x) = -x^3 + 5x^2 + 1 \rightarrow$ Grad 3 $\rightarrow$ maximal 3 Nullstellen!

Die Lösungsstrategien

3.1 Umformen nach x

Diese Lösungsstrategie ist dann sinnvoll, wenn die gegebene Funktion nur eine Potenz besitzt.

- $f(x) = 2\underline{x}^4 - 4$ ✓ Ja, nur eine Potenz von x!
- $g(x) = 2\underline{x}^4 - 4\underline{x}$ ↯ Nein, mehr als eine Potenz von x!
- $h(x) = \underline{x}^2 - 9$ ✓ Ja, nur eine Potenz von x!

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 8$, $x \in \mathbb{R}$

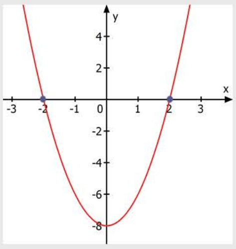
1.) $2x^2 - 8 = 0 \quad | +8$

2.) $2x^2 = 8 \quad | :2$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ } \;(*)$

3.) $x_1 = 2$

$x_2 = -2$



Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Potenz auflösen
3.) Wenn nötig und möglich, die entsprechende Wurzel ziehen

Exkurs:

Wurzeln bei Gleichungen:

- Gerade Wurzel: Eine gerade Wurzel wie $\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ }, \ldots$ lässt sich nur aus positiven Zahlen ziehen und liefert zwei Ergebnisse

→ $x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$ positiv! $\qquad x^2 = -9 \quad | \sqrt{\ }$ negativ!

$x_1 = 3 \qquad$ ↯

$x_2 = -3$

- Ungerade Wurzel: Eine ungerade Wurzel wie $\sqrt[3]{\ }, \sqrt[5]{\ }, \sqrt[7]{\ }, \ldots$ lässt sich aus allen Zahlen ziehen und liefert ein Ergebnis

→ $x^3 = 8 \quad | \sqrt[3]{\ } \qquad x^3 = -8 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x = 2 \qquad x = -2$

- Wurzel aus Null: Die Wurzel aus Null ist immer Null, egal ob gerade oder ungerade Wurzel!

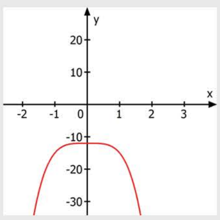
Beispiel: $f(x) = -3x^4 - 12$

1.) $-3x^4 - 12 = 0 \quad | +12$

2.) $-3x^4 = 12 \quad | :(-3)$

$x^4 = -4 \quad | \sqrt[4]{\ }$

3.) ↯



Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Potenz auflösen
3.) Wenn nötig und möglich, die entsprechende Wurzel ziehen

Die Funktion hat keine Nullstellen!

→ In den reellen Zahlen nicht möglich! Es lässt sich keine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen!

3.2 pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diese Lösungsstrategie lässt sich bei jeder quadratischen Funktion zur Nullstellenberechnung anwenden. Sinnvoll ist sie allerdings nur dann, wenn die gegebene Funktion ein Quadrat, ein x und eine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ ✓ Ja!
- $g(x) = 2x^2 + 4x$ ↯ Nein! Diese Funktion besitzt keine reine Zahl → nicht sinnvoll
- $h(x) = 2x^2 - 6$ ↯ Nein! Diese Funktion besitzt kein x → nicht sinnvoll

Beispiel: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

1.) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad |:2$

2.) $x^2 + 2x - 3 = 0$

3.) $p = 2$ und $q = -3$

4.) $x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$

5.) $= -1 \pm \sqrt{1+3}$

$= -1 \pm \sqrt{4}$

$= -1 \pm 2 \longrightarrow x_1 = -1 + 2 = 1$

$\longrightarrow x_2 = -1 - 2 = -3$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) "Normieren"
3.) p und q herauslesen
4.) In Formel einsetzen
5.) Vereinfachen

Exkurs:

→ „Normieren": Bei diesem Schritt wird die komplette Gleichung durch die Zahl geteilt, die vor x^2 steht:

Denke dran: $-x^2 = -1 \cdot x^2 \rightarrow \quad -x^2 + 4x + 5 = 0 \quad |:(-1)$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

→ p und q: p ist die Zahl vor x und q die Zahl ohne x. Achte unbedingt auf Vorzeichen!

- $x^2 + x + 1 = x^2 + 1 \cdot x + 1 \rightarrow p = 1$ und $q = 1$
- $x^2 - x - 2 = x^2 - 1 \cdot x - 2 \rightarrow p = -1$ und $q = -2$

Anzahl der Lösungen|Nullstellen:

- Diskriminante $= 0 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \longrightarrow$ eine Lösung|Nullstelle
- Diskriminante $> 0 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \longrightarrow$ zwei Lösungen|Nullstellen
- Diskriminante $< 0 \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \longrightarrow$ keine Lösung|Nullstelle

3.3 abc-Formel | Mitternachtsformel:

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Lösungsstrategie lässt sich ebenfalls bei jeder quadratischen Funktion zur Nullstellenberechnung anwenden. Sinnvoll ist sie allerdings auch nur dann, wenn die gegebene Funktion ein Quadrat, ein x und eine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ ✓ Ja!
- $g(x) = -x^2 + 4x$ ↯ Nein! Diese Funktion besitzt keine reine Zahl → nicht sinnvoll
- $h(x) = -x^2 + 5$ ↯ Nein! Diese Funktion besitzt kein x → nicht sinnvoll

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

1.) $-x^2 + 4x + 5 = 0$

2.) $a = -1,\ b = 4,\ c = 5$

3.) $x_{1|2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)}$

4.) $= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2}$

$= \frac{-4 \pm 6}{-2}$ $\longrightarrow x_1 = \frac{-4+6}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

$\longrightarrow x_2 = \frac{-4-6}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) a, b und c bestimmen
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Exkurs:

→ a, b und c herauslesen:

a ist die Zahl vor x^2, b die Zahl vor x und c das Absolutglied. Achte auf Vorzeichen!

- $-x^2 = -1 \cdot x^2$
- $x^2 = 1 \cdot x^2$
- $-x = -1 \cdot x$
- $x = 1 \cdot x$

z.B. $-x^2 + x + 2 = -1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 2 \longrightarrow a = -1,\ b = 1$ und $c = 2$

$x^2 - x + 4 = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 4 \longrightarrow a = 1,\ b = -1$ und $c = 4$

Anzahl der Lösungen | Nullstellen:

- Diskriminante $= 0 \rightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ ⟶ eine Lösung | Nullstelle
- Diskriminante $> 0 \rightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ ⟶ zwei Lösungen | Nullstellen
- Diskriminante $< 0 \rightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ ⟶ keine Lösung | Nullstelle

3.4 Satz vom Nullprodukt

Diese Lösungsstrategie lässt sich genau dann anwenden, wenn die vorliegende Funktion ausschließlich aus Faktoren (Dinge, die miteinander multipliziert werden) besteht!

- $f(x) = x \cdot (2x+4) \cdot (x^2-9)$ Ja!
- $g(x) = x \cdot (2x+4) + (x^2-9)$ Nein! Diese Funktion besteht nicht nur aus Faktoren.

Beispiel: $f(x) = x \cdot (2x+4) \cdot (x^2-9)$

1.) $x \cdot (2x+4) \cdot (x^2-9) = 0 \quad | \text{SvNP}$

2.) $x = 0$ ①, $2x+4 = 0$ ②, $x^2-9 = 0$ ③

3.) ① $x_1 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 0$

② $2x+4 = 0 \quad |-4$

$2x = -4 \quad |:2$

$x_2 = -2 \quad \rightarrow x_2 = -2$

③ $x^2-9 = 0 \quad |+9$

$x^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$

$x_3 = 3 \quad \rightarrow x_3 = 3$

$x_4 = -3 \quad \rightarrow x_4 = -3$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Hinweis:
Gerade diese Nullstellenberechnungsmethode wird besonders häufig mit den anderen Formeln und Verfahren kombiniert!

3.5 Ausklammern-Methode

Die Ausklammern-Methode lässt sich zur Nullstellenberechnung genau dann anwenden, wenn die gegebene Funktion keine reine Zahl (=Absolutglied) besitzt!

- $f(x)=x^3+4x^2$ Ja!
- $g(x)=x^3+4x^2+1$ Nein! Diese Funktion besitzt ein Absolutglied.

Beispiel: $f(x)=x^3+4x^2$

1.) $x^3+4x^2=0 \quad |()$

2.) $x^2(x+4)=0 \quad |SvNP$

3.) ① $x^2=0$ ② $x+4=0$

4.) ① $x^2=0 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1=0 \longrightarrow x_1=0$

② $x+4=0 \quad |-4$

$x_2=-4 \longrightarrow x_2=-4$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) kleinste Potenz ausklammern
3.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Hinweis:
Wenn du die Nullstellen mithilfe der Ausklammern-Methode berechnest, dann ist eine Nullstelle immer die 0!

Mögliche Fehlerquelle:

- $x^2+x=x^2+1\cdot x \longrightarrow x(x+1)$
- $x^2-x=x^2-1\cdot x \longrightarrow x(x-1)$

Vergiss nicht die -1 oder 1 in der Klammer! Du kannst jederzeit eine Probe machen:

$x\cdot(x+1)=x^2+x$ ✓

$x\cdot(x-1)=x^2-x$ ✓

3.6 Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode lässt sich zur Nullstellenberechnung genau dann anwenden, wenn die kleinste vorkommende Potenz mindestens ein x^2 ist und wenn jeder weitere Exponent ein ganzes Vielfaches des kleinsten ist! Außerdem sollte die gegebene Funktion ein Absolutglied besitzen!

- $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ Ja!
- $g(x) = x^3 + 4x^2$ (*) Nein! Diese Funktion besitzt kein Absolutglied.
- $h(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ (*) Nein! "hoch 5" ist kein ganzes Vielfaches von "hoch 2"!

Beispiel: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

1) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \quad | \; x^2 = z \rightarrow x^4 = x^2 \cdot x^2 = z \cdot z = z^2$

2) $z^2 - 4z + 3 = 0 \quad | \; pq$

3) $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$z_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{4-3}$

$= 2 \pm \sqrt{1}$

$= 2 \pm 1 \longrightarrow z_1 = 2+1 = 3 \quad | \; z = x^2$

$z_2 = 2-1 = 1 \quad | \; z = x^2$

4.) $x^2 = 3 \quad | \sqrt{}$ | $x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$

5.) $x_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ | $x_3 = 1$

$x_2 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$ | $x_4 = -1$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) kleinste Potenz substituieren (gleich z setzen) und jede höhere Potenz durch z"ersetzen.
3.) Neue Gleichung lösen
4.) Resubstituieren
5.) Wenn möglich entsprechende Wurzel ziehen

Die Substitutionsmethode führt in der Schule eigentlich immer zu der pq-Formel. Das Wort "Substituieren" bedeutet soviel wie "Ersetzen" und dementsprechend bedeutet "Resubstituieren" "Zurückersetzen".

(*) Bei dieser Funktion kannst du die Nullstellen mithilfe der Ausklammern-Methode berechnen.

(*) Hier kannst du die Nullstellen nur mit der Polynomdivision oder mit dem Horner-Schema berechnen. Sie sind allerdings nicht Teil des Lehrplans für den GK (in NRW)! Ich verlinke dir zwei Videos falls dich diese Lösungsstrategien dennoch interessieren.

Wann, welches Verfahren?

Dieses Schema kann dir bei der richtigen Anwendung dabei helfen, dich für die richtige Lösungsstrategie bzw. für das richtige Verfahren zu entscheiden!

Hat die vorliegende Funktion mehr als eine Potenz?

Ja → Verfahren! Hat die Funktion ein Absolutglied?

Nein → kein Verfahren (nach x umformen)

Verfahren! Hat die Funktion ein Absolutglied?

Ja → Ist die höchste Potenz eine hoch 2?

Nein → Ausklammern

Ist die höchste Potenz eine hoch 2?

Ja → pq-Formel, abc-Formel

Nein → Ist jeder höhere Exponent ein ganzes Vielfaches des kleinsten und dieser mind. eine 2?

Ist jeder höhere Exponent ein ganzes Vielfaches des kleinsten und dieser mind. eine 2?

Ja → Substitutionsmethode

Nein → Polynomdivision, Hornerschema, GTR

Hinweis: Die Polynomdivision bzw. das Horner-Schema ist in NRW im GK nicht mehr Teil des Lehrplans!

3.7 Kombinationen

Je nachdem wie eine Funktion aufgebaut ist, kann es sein, dass mehrere Formeln bzw. Verfahren zur Nullstellenberechnung nötig sind! Hier kannst du das Schema mehrfach heranziehen um dich für das richtige Vorgehen zu entscheiden!

Beispiel: $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$

Hat die vorliegende Funktion mehr als eine Potenz?

- Ja → Verfahren! Hat die Funktion ein Absolutglied?
  - Ja → Ist die höchste Potenz eine hoch 2?
  - Nein → Ausklammern
- Nein → kein Verfahren (nach x umformen)

$\longrightarrow f(x) = 0$

$$-x^3 + x^2 + 6x = 0 \quad |\,()$$
$$x(-x^2 + x + 6) = 0 \quad |\,\mathrm{SvNP}$$
$$x_1 = 0 \qquad -x^2 + x + 6 = 0$$

Auf diese neue Gleichung wird das Schema wiederholt angewendet!

Hat die vorliegende Funktion mehr als eine Potenz?

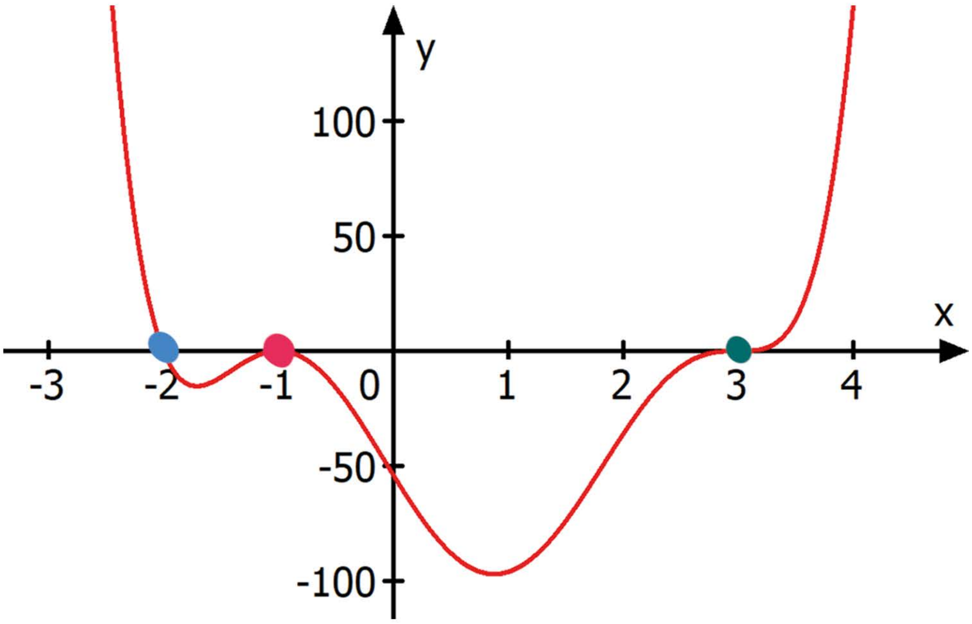
- Ja → Verfahren! Hat die Funktion ein Absolutglied?
  - Ja → Ist die höchste Potenz eine hoch 2?
    - Ja → pq-Formel, abc-Formel
  - Nein → Ausklammern
- Nein → kein Verfahren (nach x umformen)

$$-x^2 + x + 6 = 0 \quad |:(-1)$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \quad |\,pq \text{ mit } p = -1 \text{ und } q = -6$$
$$x_{2/3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \longrightarrow x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow x_2 = 3$$
$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \rightarrow x_3 = -2$$

3.8 Mehrfache Nullstellen

Beim Rechnen erkennst du direkt, ob eine mehrfache Nullstelle vorliegt:

1. Lässt sich ein x, ein x^2, oder ein x^3,... auslammern, dann ist x=0 eine einfache, doppelte oder dreifache Nullstelle.
2. Ist bei der pq-Formel oder bei der abc-Formel die Diskriminante gleich Null, dann ist die berechnete Nullstelle eine doppelte.



→ Bei x=-2 liegt eine einfache Nullstelle vor. Die x-Achse wird geschnitten.
→ Bei x=-1 liegt eine doppelte Nullstelle vor. Auf der x-Achse liegt ein Extremum.
→ Bei x=3 liegt eine dreifache Nullstelle vor. Auf der x-Achse liegt ein Sattelpunkt.

Dafür brauchst du diese Verfahren auch:

- Zum Bestimmen von f'(x)=0 (notw. Bedingung der Extrema)
- Zum Bestimmen von f''(x)=0 (notw. Bed. der Wendepunkte)
- Zur Berechnung der Schnittpunkte von Funktionen
- Zum Berechnen der Grenzen von Integralen
- ...

3.9 e-Funktion

Grundsätzlich solltest du bei der Nullstellenberechnung der e-Funktion zwei Fälle unterscheiden und dein Vorgehen bei der Berechnung entsprechend des Funktionsaufbaus anpassen.

"Funktion" mal e-Funktion

Wenn die e-Funktion mit einer anderen Funktion multipliziert wird, hilft dir der Satz vom Nullprodukt weiter!

Beispiel: $f(x) = (-2x^2+4x) \cdot e^{6x-3}$

1.) $(-2x^2+4x) \cdot e^{6x-3} = 0 \quad | \text{SvNP}$

2.) $-2x^2+4x = 0 \quad |()$ $\qquad e^{6x-3} \neq 0$

3.) $x(-2x+4) = 0 \quad | \text{SvNP}$

$x_1 = 0 \qquad -2x+4 = 0 \quad |-4$

$-2x = -4 \quad |:(-2)$

$x_2 = 2$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Wichtig: $e^{\text{irgendwas}} \neq 0$

Eine solche e-Funktion hat also genau dann Nullstellen, wenn der Term ohne e Nullstellen besitzt!

Transformierte e-Funktion

Wenn eine transformierte e-Funktion vorliegt, löst du die Gleichung nach der e-Funktion auf und wendest, wenn möglich, den natürlichen Logarithmus an!

Beispiel: $g(x) = -4 \cdot e^{3x+6} + 4$

1.) $-4 \cdot e^{3x+6} + 4 = 0 \quad |-4$

2.) $-4 \cdot e^{3x+6} = -4 \quad |:(-4)$

$e^{3x+6} = 1 \quad | \ln$ *

3.) $3x+6 = 0 \quad |-6$

$3x = -6 \quad |:3$

$x = -2$

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach e-Funktion auflösen
3.) Wenn mögl. ln anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

* $\ln(1) = 0$

Denk dran: Der Logarithmus ist nur für positive Werte definiert!

3.10 Wurzelfunktionen

Auch bei Wurzelfunktionen kannst du zwei Fälle unterscheiden und dein Vorgehen bei der Berechnung dem Funktionsaufbau anpassen.

"Funktion" mal Wurzelfunktion

Wenn die Wurzelfunktion mit einer anderen Funktion multipliziert wird, hilft dir der Satz vom Nullprodukt weiter!

Beispiel: $f(x) = (x+1) \cdot \sqrt{2x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

1) $(x+1) \cdot \sqrt{2x} = 0 \quad | \text{SvNP}$

2) $x+1 = 0 \quad |-1 \qquad \sqrt{2x} = 0 \quad |()^2$

3) $x_1 = -1 \qquad 2x = 0 \quad |:2$

nicht definiert! $\qquad x_2 = 0$

4) Probe: $(0+1) \cdot \sqrt{2 \cdot 0}$

$= 1 \cdot \sqrt{0}$

$= 1 \cdot 0 = 0$ ✓ → $x = 0$ ist die einzige Nullstelle!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen
4.) Probe

Achte unbedingt darauf, ob deine berechnete Nullstelle im Definitionsbereich liegt oder nicht! Vergiss die Probe nicht!

Transformierte Wurzelfunktion

Wenn eine transformierte Wurzelfunktion vorliegt, löst du die Gleichung nach der Wurzelfunktion auf und quadrierst im Anschluss die Gleichung.

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot \sqrt{4x-2} + 2$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 0{,}5}$ ✓

1) $2 \cdot \sqrt{4x-2} + 2 = 0 \quad |-2$

2) $2 \cdot \sqrt{4x-2} = -2 \quad |:2$

$\sqrt{4x-2} = -1 \quad |()^2$

3) $4x-2 = 1 \quad |+2$

4) $4x = 3 \quad |:4$

$x = \frac{3}{4}$

5) $2 \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} - 2} + 2 \stackrel{?}{=} 0$

$4 \neq 0$ ↯

→ Die Funktion hat keine Nullstellen!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach Wurzel auflösen
3.) quadrieren
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, lösen
5.) Probe

3.11 ln-Funktion

Auch bei der Nullstellenberechnung der ln-Funktion gilt es zwei Fälle zu unterscheiden. Dementsprechend musst du dein Vorgehen bei der Berechnung dem Funktionsaufbau anpassen.

"Funktion" mal ln-Funktion

Wenn die ln-Funktion mit einer anderen Funktion multipliziert wird, dann hilft dir der Satz vom Nullprodukt weiter!

Beispiel: $f(x) = (4x+8)\cdot\ln(x-8) \quad D=\mathbb{R}^{>8}$

1.) $(4x+8)\cdot\ln(x-8)=0 \quad |\text{SvNP}$

2.) $4x+8=0 \quad |-8 \qquad \ln(x-8)=0 \quad |e$

3.) $4x=-8 \quad |:4 \qquad x-8=1 \quad |+8$

$x=-2 \qquad x=9$

nicht definiert

x=9 ist die einzige Nullstelle der Funktion!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Faktoren einzeln gleich Null setzen
3.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

Achte unbedingt darauf, ob deine berechnete Nullstelle im Definitionsbereich liegt oder nicht!

Transformierte ln-Funktion

Wenn eine transformierte ln-Funktion vorliegt, dann löst du die Gleichung nach der ln-Funktion auf und wendest die natürliche Exponentialfunktion an!

Beispiel: $g(x) = 5\cdot\ln(x^2+9)-10 \quad D=\mathbb{R}$

1.) $5\cdot\ln(x^2+9)-10=0 \quad |+10$

2.) $5\cdot\ln(x^2+9)=10 \quad |:5$

$\ln(x^2+9)=2 \quad |e$

3.) $x^2+9=e^2\approx 7{,}4 \quad |-9$

4.) $x^2=-1{,}6 \quad |\sqrt{\ }$

$\lightning$

Die Funktion g(x) hat keine Nullstellen!

Schritte:

1.) f(x)=0 bilden
2.) Nach ln-Funktion auflösen
3.) e anwenden
4.) Neue Gleichungen, wenn möglich, einzeln lösen

3.12 gebrochenrationale Funktionen

Wenn du die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion berechnen sollst, setzt du den Zähler gleich Null und löst, wenn möglich, die so entstandene Gleichung. Dein Ergebnis vergleichst du anschließend mit dem Definitionsbereich!

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-4}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

1) $x^2 - 3x = 0 \quad | ()$

2) $x(x-3) = 0 \quad |$ SvNP

$x_1 = 0 \qquad x - 3 = 0 \quad | +3$

$x_2 = 3$

3) Beide Nullstellen liegen im Definitionsbereich!

Die Funktion hat zwei Nullstellen: $x_1=0$ und $x_2=3$

Schritte:

1.) z(x)=0 bilden
2.) Wenn möglich lösen
3.) Mit Definitionsbereich abgleichen

Aufgabe 2:

Berechne, wenn möglich, die Nullstellen dieser Funktionen!

1. $f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$
2. $g(x) = (-x^3 + 4x^2) \cdot e^{3x+1}$
3. $h(x) = 2 \cdot \sqrt{x-4} + 10$

Die Lösung findest du auf Seite 82.

4. Der y-Achsenschnitt

Was ist der y-Achsenschnitt?

Der y-Achsenschnitt ist derjenige Funktionswert, den du erhältst, wenn du für jedes x in die gegebene Funktion die Null einsetzt und die so entstandene Rechnung ausrechnest!

$$\longrightarrow x = 0$$

Beispiele:

$f(x) = -x^4 + 5x - 1$

$\longrightarrow f(0) = -0^4 + 5 \cdot 0 - 1 = -1$

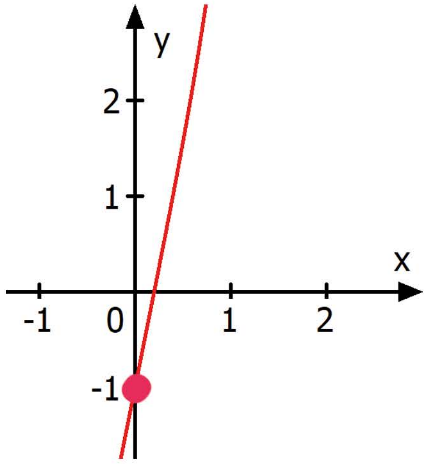
$g(x) = (4x+1) \cdot e^{x^2}$

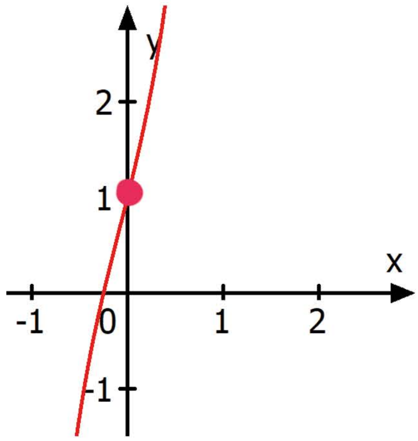
$\longrightarrow g(0) = (4 \cdot 0 + 1) \cdot e^{0^2} = 1 \cdot \underbrace{e^0}_{1} = 1$

$1 \longrightarrow$ Jede Zahl hoch 0 ist 1!

Graphische Bedeutung:

Graphisch gesehen ist der y-Achsenschnitt die Schnittstelle des Funktionsgraphen mit der senkrechten y-Achse!





Vorsicht:

Nicht jede Funktion schneidet die senkrechte y-Achse. Diejenigen Funktionen, die die Null nicht in ihrem Definitionsbereich haben, besitzen keinen Schnittpunkt mit der senkrechten y-Achse und haben somit keinen y-Achsenschnitt.

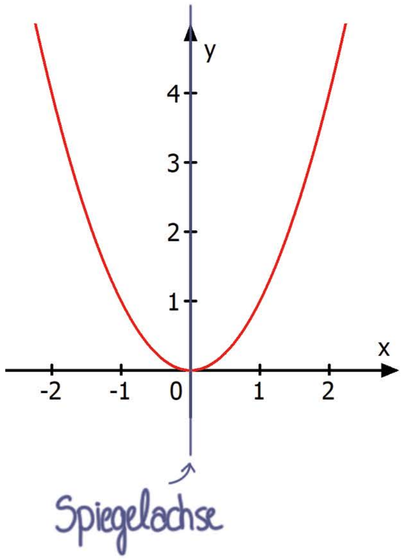
5. Die Symmetrie

Die Symmetrie in der Kurvendiskussion

In der Kurvendiskussion werden zwei Arten von Symmetrien unterschieden:

5.1 Die Symmetrie zur y-Achse

- Bei Funktionen, die symmetrisch zur y-Achse sind, dient die senkrechte y-Achse als Spiegelachse.
- Ganzrationale Funktionen, die symmetrisch zur y-Achse sind, haben ausschließlich gerade Exponenten und können ein Absolutglied besitzen.



→ Rechnerischer Nachweis:

$$f(x) = f(-x)$$

Beispiel: → Strategie: $f(-x)$ bilden und mit $f(x)$ vergleichen!

1) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 1$

→ $f(-x) = -(-x)^3 + 4 \cdot (-x)^2 - 1 = x^3 + 4x^2 - 1$] $\neq$

da $f(x) \neq f(-x)$ → $f(x)$ ist nicht symmetrisch zur y-Achse!

2) $g(x) = (x^2+4) \cdot e^{x^4}$

→ $g(-x) = ((-x)^2 + 4) \cdot e^{(-x)^4} = (x^2+4) \cdot e^{x^4}$] $=$

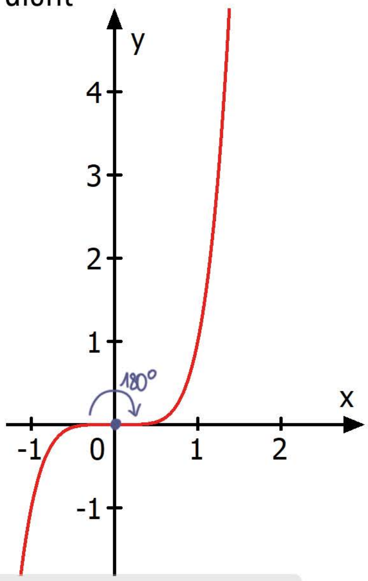
da $g(x) = g(-x)$ → $g(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse!

Regel:

→ $(-x)^{\text{gerade}}$ = positiv, z.B $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^2 = x^2$

→ $(-x)^{\text{ungerade}}$ = negativ, z.B $(-x)^5 = -x^5$, $(-x)^3 = -x^3$

5.2 Punktsymmetrie zum Ursprung



- Bei Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind, dient der Ursprung als Drehzentrum.
- Ganzrationale Funktionen, die symmetrisch zum Ursprung sind, haben ausschließlich ungerade Exponenten und dürfen kein Absolutglied besitzen.

→ Rechnerischer Nachweis:

$$f(-x) = -f(x)$$

Beispiel:

→ $f(-x)$ und $-f(x)$ bilden und miteinander vergleichen!

1) $f(x) = 2x^3 - 6x$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow f(-x) = 2\cdot(-x)^3 - 6\cdot(-x) = -2x^3 + 6x \\ \rightarrow -f(x) = -(2x^3 - 6x) = -2x^3 + 6x \end{array}\right] =$

da $f(-x) = -f(x)$ → punktsymmetrisch zum Ursprung

2) $g(x) = 2x\cdot e^{5x+1}$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow g(-x) = 2\cdot(-x)\cdot e^{5\cdot(-x)+1} = -2x\cdot e^{-5x+1} \\ \rightarrow -g(x) = -(2x\cdot e^{5x+1}) = -2x\cdot e^{5x+1} \end{array}\right] \neq$

da $g(-x) \neq -g(x)$ → nicht punktsymmetrisch zum Ursprung

Tipp:
Eine achsensymmetrische Funktion ist nicht punktsymmetrisch und umgekehrt!

Aufgabe 3:

Prüfe, ob die gegebenen Funktionen symmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder weder noch sind!

1. $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$
2. $g(x) = -x^3 + x - 3$
3. $h(x) = (2x^2+1)\cdot e^{3x^2}$

Die Lösung findest du auf Seite 83.

6. Das Grenzwertverhalten

6.1 Was ist das Grenzwertverhalten?

Anhand des Globalverhaltens bzw. Grenzwertverhaltens wird innerhalb der Kurvendiskussion ermittelt, wie sich die Funktionswerte in den Rändern, also für ansteigende x-Werte bzw. für immer kleiner werdende x-Werte verhalten. Es werden bei den ganzrationalen Funktionen und bei der e-Funktion also zwei Fälle unterschieden:

1.Fall: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$

"Wohin gehen die Funktionswerte, wenn die x-Werte immer weiter steigen?"

2.Fall: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

"Wohin gehen die Funktionswerte, wenn die x-Werte immer weiter fallen?"

6.2 Bei ganzrationalen Funktionen

Bei der Bestimmung des Grenzwertverhaltens achtest du bei ganzrationalen Funktionen ausschließlich auf die höchste vorkommende Potenz und auf den Leitkoeffizienten.

$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

1.Fall: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Begründung: $-2x^3 = \underbrace{-2 \cdot x \cdot x \cdot x}_{- \cdot + \cdot + \cdot +}$ negativ $\to -\infty$

2.Fall: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Begründung: $-2x^3 = \underbrace{-2 \cdot x \cdot x \cdot x}_{- \cdot - \cdot - \cdot -}$ positiv $\to +\infty$

Tipp:
Ist der höchste Exponent eine ungerade Zahl (wie in diesem Beispiel), dann liefert das Grenzwertverhalten zwei verschiedene Fälle, wenn er eine gerade Zahl ist, dann zwei gleiche Fälle!

6.3 Bei der e-Funktion

Bei der Bestimmung des Globalverhaltens der e-Funktion unterscheidest du ebenfalls diese beiden Fälle und es gilt:

- $e^{+\infty} \longrightarrow +\infty$ "Geht der Exponent gegen positiv Unendlich, dann geht die e-Funktion insgesamt gegen plus Unendlich."
- $e^{-\infty} \longrightarrow 0$ "Geht der Exponent gegen negativ Unendlich, dann geht die e-Funktion insgesamt gegen Null."

Beispiel:

$f(x) = (-2x^2+4)\cdot e^{3x-1}$

1. Fall: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$(\boxed{-2x^2}+4)\cdot e^{3x-1}$

$-\infty \qquad +\infty$

$-\infty$

Begründung: $-2x^2 = -2 \cdot x \cdot x$

$- \cdot + \cdot + \longrightarrow -\infty$

$e^{3x-1} \rightarrow \boxed{3x}+1$

$+ \cdot + \longrightarrow +\infty$

$e^{+\infty} \longrightarrow +\infty$

2. Fall: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$(\boxed{-2x^2}+4)\cdot e^{3x-1}$

$-\infty \qquad 0$

0

Begründung: $-2x^2 = -2 \cdot x \cdot x$

$- \cdot - \cdot - \longrightarrow -\infty$

$e^{3x-1} \rightarrow \boxed{3x}+1$

$+ \cdot - \longrightarrow -\infty$

$e^{-\infty} \longrightarrow 0$

Aufgabe 4:

Bestimme das Globalverhalten der gegebenen Funktionen für x gegen Unendlich und x gegen negativ Unendlich!

1. $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$
2. $g(x) = -x^3 + x$
3. $h(x) = (2x^2+1)\cdot e^{3x}$

Die Lösung findest du auf Seite 84.

7. Die Ableitungen

7.1 Elementare Ableitungsregeln

Konstantenregel:

$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0$

"Die Ableitung einer konstanten Zahl ist Null!"

Potenzregel:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^{5-1}$

$= 5 \cdot x^4$

"Aktueller Exponent vor die Variable multiplizieren und für den neuen Exponenten vom alten eins abziehen!"

Faktorregel:

$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

$f(x) = -2 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) = -2 \cdot 3x^{3-1}$

$= -6x^2$

"Ein Faktor wird beim Ableiten als Faktor übernommen!"

Summen-/ Differenzregel:

$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

$f(x) = -3x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = -3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0$

$= -6x$

"Alles was durch ein Plus bzw. Minus getrennt ist wird einzeln abgeleitet!"

Beispiele:

$\rightarrow f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 4x - 1$

$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

$\rightarrow h(x) = 3x \cdot (-2x^2 + 6x - 5) = -6x^3 + 18x^2 - 15x$

$h'(x) = -18x^2 + 36x - 15$

$\rightarrow g(x) = x \cdot (4x + 5) = 4x^2 + 5x$

$g'(x) = 8x + 5$

$\rightarrow i(x) = -x^3 + x$

$i'(x) = -3x^2 + 1$

Aufgabe 5:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = 4x^2 + 6x - 1$
2. $g(x) = x^3 - x + 4$
3. $h(x) = -x^2 + x$

Die Lösung findest du auf Seite 85.

7.2 Brüche und Wurzeln in Potenzschreibweise

Brüche:

$$\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$$

„Zähler mal Basis des Nenners hoch Exponent mit Vorzeichenwechsel!"

Beispiel:

1) $f(x) = \frac{2}{x^3} \xrightarrow{\text{Umwandlung}} 2x^{-3} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 2 \cdot (-3)\, x^{-3-1}$
$= -6x^{-4}$

2) $g(x) = -\frac{3}{x} \xrightarrow{\text{Umwandlung}} -3x^{-1} \xrightarrow{\text{Ableitung}} g'(x) = -3 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1}$
$= 3x^{-2}$

3) $h(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{4}{x^2} + 5x \xrightarrow{\text{Umwandlung}} 2x^{-4} - 4x^{-2} + 5x \xrightarrow{\text{Ableitung}} h'(x) = 2 \cdot (-4)\, x^{-4-1} - 4 \cdot (-2)\, x^{-2-1} + 5$
$= -8x^{-5} + 8x^{-3} + 5$

Wurzeln:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

„Der Wurzelexponent wandert in den Nenner und die Potenz in den Zähler!"

Beispiel:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \xrightarrow{\text{Umwandlung}} x^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1}$
$= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

2) $g(x) = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} \xrightarrow{\text{Umwandlung}} x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} g'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$
$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

3) $h(x) = -4 \cdot \sqrt[5]{x^3} \xrightarrow{\text{Umwandlung}} -4 \cdot x^{\frac{3}{5}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} h'(x) = -4 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1}$
$= -\frac{12}{5} x^{-\frac{2}{5}}$

Aufgabe 6:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$
2. $g(x) = -4 \cdot \sqrt[3]{x}$
3. $h(x) = -\sqrt{x}$

Die Lösung findest du auf Seite 86.

7.3 Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

7.4 Produktregel

Regel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Die Produktregel erkennst du daran, dass zwei Funktionen miteinander multipliziert werden!

Beispiel: $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2)$

1.) $u(x) = e^x$ $\quad u'(x) = e^x$
2.) $v(x) = x^2 + 2$ $\quad v'(x) = 2x$

3.) $f'(x) = e^x \cdot (x^2+2) + e^x \cdot 2x$
4.) $= e^x (x^2 + 2 + 2x)$
$= e^x (x^2 + 2x + 2)$

Schritte:

1.) u(x) und v(x) herauslesen
2.) u'(x) und v'(x) bilden
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

1.) $u(x) = x^2$ $\quad u'(x) = 2x$
2.) $v(x) = \ln(x)$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

3.) $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$
4.) $= 2x \cdot \ln(x) + \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$
$= 2x \cdot \ln(x) + x$

Schritte:

1.) u(x) und v(x) herauslesen
2.) u'(x) und v'(x) bilden
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

7.5 Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \longrightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Bei der Kettenregel ist eine Funktion in eine andere eingesetzt!

Beispiel: $f(x) = e^{6x+1}$

1) $u(x) = e^x$ $\quad u'(x) = e^x$
2) $v(x) = 6x+1$ $\quad v'(x) = 6$

3) $f'(x) = e^{6x+1} \cdot 6$
4) $\quad = 6e^{6x+1}$

Schritte:

1.) u(x) und v(x) herauslesen
2.) u'(x) und v'(x) bilden
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Beispiel: $f(x) = (5x+2)^4$

1) $u(x) = x^4$ $\quad u'(x) = 4x^3$
2) $v(x) = 5x+2$ $\quad v'(x) = 5$

3) $f'(x) = 4 \cdot (5x+2)^3 \cdot 5$
4) $\quad = 20 \cdot (5x+2)^3$

Schritte:

1.) u(x) und v(x) herauslesen
2.) u'(x) und v'(x) bilden
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen

Trick für die Ableitung einer Vekettung mit der e-Funktion:

$f(x) = e^{v(x)} \longrightarrow f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$

z.B. $f(x) = e^{x^2+4x} \longrightarrow f'(x) = (2x+4) \cdot e^{x^2+4x}$

"Ableitung des Exponenten mal die Ausgangsfunktion!"

Trick für die Ableitung einer Vekettung mit der ln-Funktion:

$f(x) = \ln(v(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$

z.B. $f(x) = \ln(3x+1) \longrightarrow f'(x) = \frac{3}{3x+1}$

"Ableitung des Argumentes durch das Argument!"

Aufgabe 7:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = (-3x+8)^5$
2. $g(x) = 3e^{7x+1}$
3. $h(x) = \ln(-x^2+4x)$

Die Lösung findest du auf Seite 86.

7.6 Kombination aus Produkt- und Kettenregel

Beispiel: $f(x) = (3x^2+4x) \cdot e^{2x}$

1.) $u(x) = 3x^2+4x \qquad u'(x) = 6x+4$

2.) $v(x) = e^{2x} \xrightarrow{\text{Trick!}} v'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

3.) $f'(x) = (6x+4) \cdot e^{2x} + (3x^2+4x) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$$= e^{2x}\left(6x+4+(3x^2+4x)\cdot 2\right)$$

$$= e^{2x}\left(6x+4+6x^2+8x\right)$$

$$= e^{2x}\left(6x^2+14x+4\right)$$

Bei einer solchen Kombination schreibst du erst das u(x) und v(x) der Produktregel heraus und bestimmst dann ggfs. mithilfe einer Nebenrechnung das u'(x) und das v'(x). Natürlich kannst du auch anstelle der Nebenrechnung den Trick für die e-Funktion bzw. für die ln-Funktion anwenden. Anschließend wendest du die Produktregel an und vereinfachst diesen Ausdruck!

Aufgabe 8:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

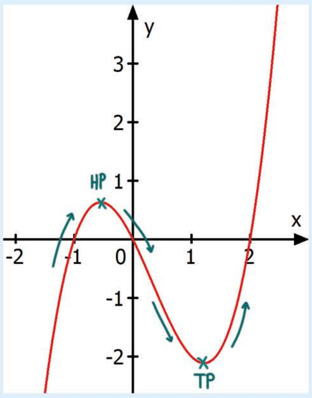
1. $f(x) = 2x \cdot (3x+5)^4$
2. $g(x) = x^2 \cdot e^{-6x+1}$
3. $h(x) = -4x \cdot \ln(2x+1)$

Die Lösung findest du auf Seite 87.

8. Die Extrema

Die Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion bilden zusammen die Extrema einer Funktion.

- In den Hoch- und Tiefpunkten ist die Steigung Null (also gilt $f'(x)=0$)
- Hochpunkt: davor steigend, danach fallend
- Tiefpunkt: davor fallend, danach steigend
- Hoch- bzw. Tiefstelle: nur die x-Koordinate
- Hoch- bzw. Tiefpunkt: x und y-Koordinate



Beispiel: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

1.) $f'(x) = 4x + 4$
$f''(x) = 4$

2.) notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$4x + 4 = 0 \quad | -4$
$4x = -4 \quad | :4$
$x = -1$

3.) hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ & $f''(x) \neq 0$
$f''(-1) = 4 \quad > 0 \rightarrow TP$

4.) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = 2 - 4 - 6 = -8 \rightarrow TP(-1|-8)$

Schritte:

1.) $f'(x)$ und $f''(x)$ bilden
2.) notw. Bed.: $f'(x)=0$
3.) hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$
4.) y-Koordinate berechnen

Ist das Ergebnis der Rechnung aus dem 3. Schritt positiv, dann ist die eingesetzte x-Koordinate die x-Koordinate eines Tiefpunktes, ist es negativ, dann die eines Hochpunktes!

Wenn deine Aufgabe nur darin besteht die Tiefstelle oder die Hochstelle zu berechnen, dann musst du nicht die y-Koordinate berechnen, sondern bist nach dem 3. Schritt mit deiner Rechnung fertig!

Beispiel: $f(x) = 2x \cdot e^{-x+1}$

1) $u(x) = 2x \qquad u'(x) = 2$
$v(x) = e^{-x+1} \qquad v'(x) = -1 \cdot e^{-x+1}$

$$f'(x) = 2e^{-x+1} + 2x \cdot (-1 \cdot e^{-x+1})$$
$$= e^{-x+1} \cdot (2 - 2x)$$
$$\rightarrow f'(x) = e^{-x+1} \cdot (2 - 2x)$$

$u(x) = e^{-x+1} \qquad u'(x) = -1 \cdot e^{-x+1}$
$v(x) = 2 - 2x \qquad v'(x) = -2$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-x+1} \cdot (2 - 2x) + e^{-x+1} \cdot (-2)$$
$$= e^{-x+1} \cdot (-1 \cdot (2 - 2x) - 2)$$
$$= e^{-x+1} \cdot (-2 + 2x - 2)$$
$$= e^{-x+1} \cdot (2x - 4)$$
$$\rightarrow f''(x) = e^{-x+1} \cdot (2x - 4)$$

2) notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$e^{-x+1} \cdot (2 - 2x) = 0 \quad | \text{SvNP}$

$e^{-x+1} \neq 0 \qquad 2 - 2x = 0 \quad | -2$

$-2x = -2 \quad | : (-2)$

$x = 1$

3) hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(1) = e^{-1+1} \cdot (2 \cdot 1 - 4) = e^0 \cdot (-2) = -2 < 0 \rightarrow \text{HP}$

4) y-Koordinate:

$f(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-1+1} = 2e^0 = 2 \qquad \rightarrow \text{HP}(1|2)$

Schritte:

1.) f'(x) und f''(x) bilden
2.) notw. Bed.: f'(x)=0
3.) hinr. Bed.: f'(x)=0 und f''(x)≠0
4.) y-Koordinate berechnen

Wie du siehst, brauchst du die Verfahren, die du aus der Nullstellenberechnung kennst, nicht nur für die Ermittlung der Nullstellen, sondern ebenfalls zum Lösen der notwendigen Bedingung bei der Berechnung der Extrema!

Aufgabe 9:

Bestimme die Extrema der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
2. $g(x) = 8x \cdot e^{-x}$

Die Lösung findest du auf Seite 88.

Das Vorzeichen-Wechsel-Kriterium

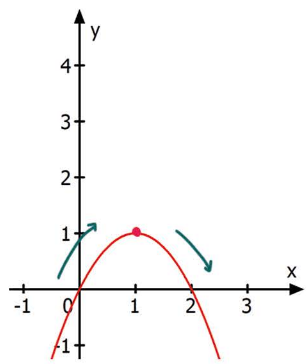
Du kannst die hinreichende Bedingung auch mithilfe des Vorzeichen-Wechsel-Kriteriums bestimmen. Dieses Kriterium beruht darauf, dass du die Steigung vor und nach einer berechneten x-Koordinate, die für ein Extremum in Frage kommt, bestimmst. Es gilt:

→ Ist die Funktion vor dieser x-Koordinate steigend und danach fallend, dann ist das die x-Koordinate eines Hochpunktes.

→ Ist die Funktion vor dieser x-Koordinate fallend und danach steigend, dann ist das die x-Koordinate eines Tiefpunktes.

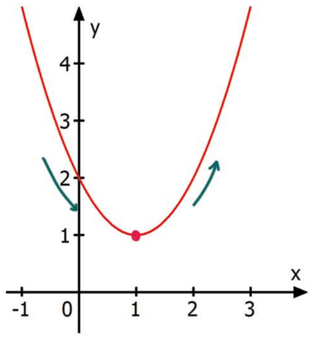
→ Stellst du fest, dass davor und danach die gleiche Steigung ist, dann ist berechnete x-Koordinate, die eines Sattelpunktes.

Hochpunkt



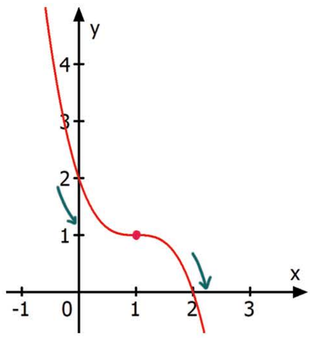
Wechsel von steigend nach fallend

Tiefpunkt



Wechsel von fallend nach steigend

Sattelpunkt



kein Steigungs-wechsel

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x$

1) $f'(x) = 4x - 4$

2) notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$4x - 4 = 0 \quad |+4$$
$$4x = 4 \quad |:4$$
$$x = 1$$

3)

$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(0) = 4 \cdot 0 - 4 = -4$		$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$
$\searrow$	$\rightarrow$*	$\nearrow$

Steigung vor $x = 1$ negativ
→ fallend

Steigung nach $x = 1$ positiv
→ steigend

→ Wechsel von fallend nach steigend
→ Tiefpunkt

4) $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2$
→ $TP(1|-2)$

Schritte:

1.) f'(x) bilden
2.) notw. Bed.: f'(x)=0
3.) Vorzeichen-Wechsel-Kriterium
4.) y-Koordinate berechnen

* In der x-Koordinate (Lösung von $f'(x)=0$) ist die Steigung 0, also weder steigend, noch fallend.

Wann f''(x) und wann VZW-Kriterium

In der Regel bildest du die hinreichende Bedingung mithilfe der zweiten Ableitung. Es gibt allerdings zwei häufige Ausnahmen:

1.) Die Bestimmung der zweiten Ableitung ist deutlich aufwendiger als das VZW-Kriterium (das ist allerdings in der Schule unüblich).

2.) Wenn die x-Koordinate, die du in der notwendigen Bedingung berechnet hast, eingesetzt in die zweite Ableitung das Ergebnis Null liefert und du somit nicht eindeutig entscheiden kannst, ob es sich um einen HP, TP oder SP handelt!

9. Die Wendepunkte

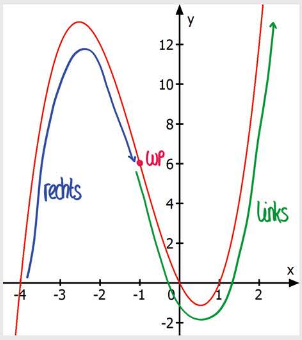
Der Wendepunkt ist derjenige Punkt, in dem sich die Krümmung der Funktion ändert (von rechts- nach linksgekrümmt oder umgekehrt).
Im Wendepunkt selber ist die Krümmung gleich Null (deswegen gilt: $f''(x)=0$, denn die zweite Ableitung ist die Krümmungsfunktion).
Ein Wendepunkt, in dem die Steigung Null ist, ist ein Sattelpunkt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

1) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$
   $f''(x) = 6x + 6$
   $f'''(x) = 6$
2) notw. Bed.: $f''(x) = 0$
   $6x + 6 = 0 \quad | -6$
   $6x = -6 \quad | :6$
   $x = -1$
3) hinr. Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
   $f'''(-1) = 6 \neq 0$
4) $f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = -1 + 3 + 4 = 6 \rightarrow WP(-1|6)$

Schritte:

1.) $f''(x)$ und $f'''(x)$ bilden
2.) notw. Bed.: $f''(x)=0$
3.) hinr. Bed.: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$
4.) y-Koordinate berechnen



Ist das Ergebnis der Rechnung aus dem 3. Schritt ungleich Null, dann ist die eingesetzte x-Koordinate, die x-Koordinate eines Wendepunktes.

Wenn deine Aufgabe nur darin besteht die Wendestelle zu berechnen, dann musst du nicht die y-Koordinate berechnen, sondern bist nach dem 3. Schritt mit deiner Rechnung fertig!

Beispiel: $f(x) = 2x \cdot e^{-x+1}$

1.) $f'(x) = e^{-x+1} \cdot (2-2x)$
$f''(x) = e^{-x+1} \cdot (2x-4)$
$\Big\}$ s. Kapitel Extrema

$u(x) = e^{-x+1}$ $\quad u'(x) = -1 \cdot e^{-x+1}$
$v(x) = 2x-4$ $\quad v'(x) = 2$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= -1 \cdot e^{-x+1} \cdot (2x-4) + e^{-x+1} \cdot 2 \\
&= e^{-x+1} \cdot (-1 \cdot (2x-4) + 2) \\
&= e^{-x+1} \cdot (-2x+4+2) \\
&= e^{-x+1} \cdot (-2x+6)
\end{aligned}
$$

$\rightarrow f'''(x) = e^{-x+1} \cdot (-2x+6)$

2.) notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$e^{-x+1} \cdot (2x-4) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$e^{-x+1} \neq 0 \qquad 2x-4 = 0 \quad |+4$

$2x = 4 \quad |:2$

$x = 2$

3.) hinr. Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = e^{-2+1} \cdot (-2 \cdot 2 + 6) = e^{-1} \cdot (2) \approx 0{,}74 \neq 0 \rightarrow$ WP

4.) y-Koordinate:

$f(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{-2+1} = 4e^{-1} \approx 1{,}47 \rightarrow WP(2|1{,}47)$

Schritte:

1.) $f''(x)$ und $f'''(x)$ bilden
2.) notw. Bed.: $f''(x)=0$
3.) hinr. Bed.: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$
4.) y-Koordinate berechnen

Auch hier brauchst du die Verfahren, die du von der Berechnung der Nullstellen kennst!

Aufgabe 10:

Bestimme die Wendepunkte der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
2. $g(x) = 8x \cdot e^{-x}$

Die Lösung findest du auf Seite 89.

10. Die Monotonie

Mithilfe der Monotonie wird ermittelt in welchen Bereichen die Funktionswerte steigend bzw. fallend sind!

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

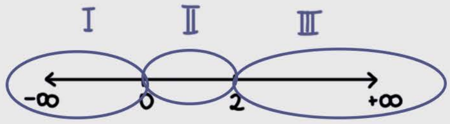
Schritte:

1.) f'(x)=0 lösen
[2.) Hilfsstrahl]
3.) Intervalle
4.) Zahl aus Intervall in f'(x) einsetzen, ausrechnen und deuten:
- $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ steigend
- $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ fallend

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$3x^2 - 6x = 0 \quad |()$$
$$x(3x-6) = 0 \quad |\text{SvNP}$$
$$x_1 = 0 \qquad 3x - 6 = 0 \quad |+6$$
$$3x = 6 \quad |:3$$
$$x_2 = 2$$

2)

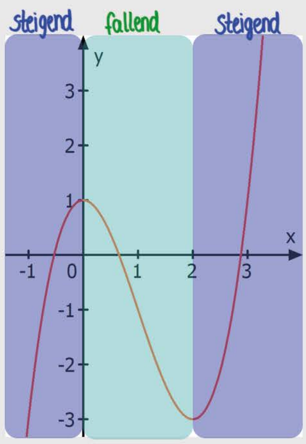


3) 4)

$(-\infty;0)$ $x=-1 \rightarrow f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 3+6 = 9 > 0 \rightarrow$ steigend (streng)

$(0;2)$ $x=1 \rightarrow f'(1) = 3\cdot(1)^2 - 6\cdot(1) = 3-6 = -3 < 0 \rightarrow$ fallend (streng)

$(2;+\infty)$ $x=3 \rightarrow f'(3) = 3\cdot(3)^2 - 6\cdot(3) = 27-18 = 9 > 0 \rightarrow$ steigend (streng)



Genaugenommen sind die Funktionen in den Bereichen sogar streng monoton steigend. Der Unterschied zwischen streng monoton steigend bzw. fallend und monoton steigend bzw. fallend besteht darin, dass bei der strengen Monotonie keine konstanten Abschnitte (also Bereiche mit der Steigung Null) mehr erlaubt sind.

Eine Gerade hat im übrigen nur eine eindeutige Steigung, die du direkt an der Funktionsgleichung ablesen kannst:

$y = \underline{2}x$

$\downarrow$

$m = 2 > 0 \rightarrow$ Die Funktion ist streng monoton steigend in $(-\infty;+\infty)$

Beispiel: $f(x) = x^4 + 4x^3$

1.) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 0 \quad |()$

$x^2 \cdot (4x + 12) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$ $\qquad 4x + 12 = 0 \quad |-12$

$x_1 = 0$ $\qquad 4x = -12 \quad |:4$

$x_2 = -3$

2.) $\underset{-\infty}{\longleftarrow} \quad \mathrm{I} \quad \underset{-3}{|} \quad \mathrm{II} \quad \underset{0}{|} \quad \mathrm{III} \quad \underset{+\infty}{\longrightarrow}$

Schritte:

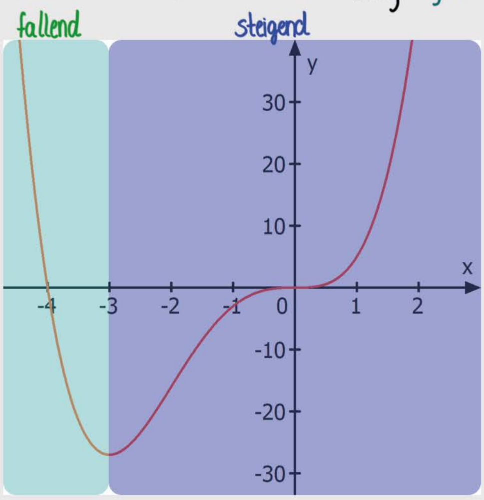
1.) $f'(x)=0$ lösen
[2.) Hilfsstrahl]
3.) Intervalle
4.) Zahl aus Intervall in $f'(x)$ einsetzen, ausrechnen und deuten:
- $f'(x_0) > 0 \longrightarrow$ steigend
- $f'(x_0) < 0 \longrightarrow$ fallend

3.) $(-\infty;-3)$ $\quad f'(-4) = 4\cdot(-4)^3 + 12\cdot(-4)^2 = -64 < 0 \rightarrow$ fallend (streng)

4.) $(-3;0)$ $\quad f'(-1) = 4\cdot(-1)^3 + 12\cdot(-1)^2 = 8 > 0 \rightarrow$ steigend

$(0;+\infty)$ $\quad f'(1) = 4\cdot 1^3 + 12\cdot 1 = 16 > 0 \rightarrow$ steigend

$\Big\}$ kein Wechsel $\rightarrow$ Sattelpunkt bei $x=0$



Aufgabe 11:

Bestimme die Bereiche, in denen die Funktion steigend bzw. fallend ist.

1. $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$

Die Lösung findest du auf Seite 89.

11. Die Krümmung

Mithilfe der Krümmungsberechnung wird ermittelt, in welchen Bereichen die Funktion nach rechts bzw. nach links gekrümmt ist!

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

1.) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \quad | +6$

$6x = 6 \quad | :6$

$x = 1$

2.) $-\infty \quad \text{I} \quad 1 \quad \text{II} \quad +\infty$

3.) $(-\infty; 1)$ $\quad f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \rightarrow$ rechts

4.) $(1; +\infty)$ $\quad f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0 \rightarrow$ links

Schritte:

1.) $f''(x) = 0$ lösen

[2.) Hilfsstrahl]

3.) Intervalle

4.) Zahl aus Intervall in $f''(x)$ einsetzen, ausrechnen und deuten:

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ links
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ rechts

Eine lineare Funktion ist gar nicht gekrümmt, sondern gerade.

Eine Funktion zweiten Grades ist entweder durchgängig links oder durchgängig rechts gekrümmt:

→ Ist der Leitkoeffizient positiv, dann ist sie nach links gekrümmt:

z.B.: $f(x) = \underline{2}x^2 + 4x \rightarrow 2 > 0 \rightarrow (-\infty; +\infty)$ links gekrümmt

→ Ist der Leitkoeffizient negativ, dann ist sie nach rechts gekrümmt:

z.B.: $f(x) = \underline{-3}x^2 - 6x \rightarrow -3 < 0 \rightarrow (-\infty; +\infty)$ rechts gekrümmt

Aufgabe 12:

Bestimme die Bereiche, in denen die Funktion nach rechts bzw. links gekrümmt ist.

1. $f(x) = -x^3 - 4{,}5x^2$

Die Lösung findest du auf Seite 90.

12. Der Wertebereich

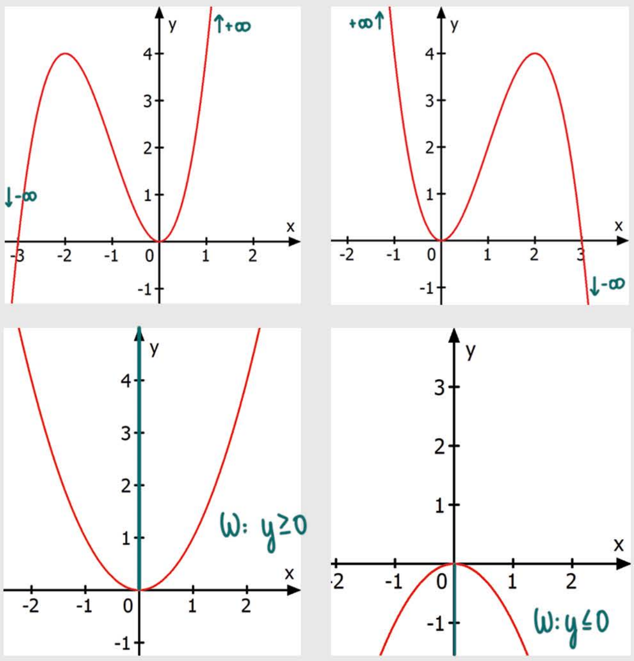
Was ist der Wertebereich?

Der Wertebereich ist der Zahlbereich, den die Funktionswerte (y-Werte) annehmen können! Es gibt zwei Möglichkeiten zur Bestimmung:

a) Anhand des Funktionsgraphen

b) Mithilfe des Grenzwertverhaltens und der Extrema

Funktionsgraph



Zwei unterschiedliche Äste → W = ℝ

Es werden alle Funktionswerte angenommen!

Zwei gleiche Äste

Es werden nicht alle Funktionswerte angenommen!

Grenzwertverhalten und Extrema

- Grenzwertverhalten liefert zwei unterschiedliche Fälle:

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ oder

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

IMMER $W: y = \mathbb{R}$

- Grenzwertverhalten liefert zwei gleiche Fälle:

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Es kommt auf die y-Koordinate des absoluten TP's an:

z.B.: TP(-2|-4) ; HP(1|5) ; TP(2|-1)

$W = y \geq -4$

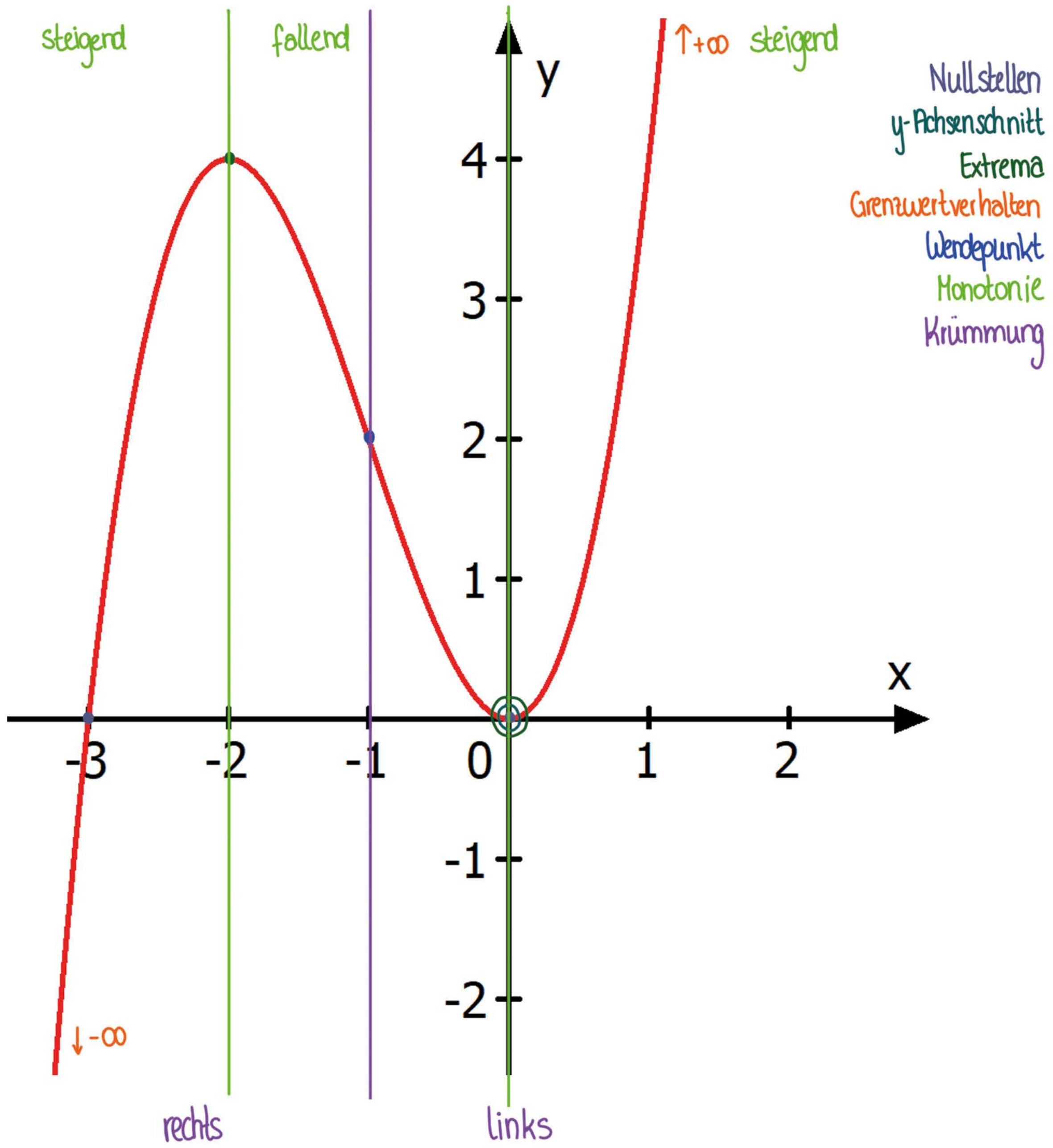
→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Es kommt auf die y-Koordinate des absoluten HP's an:

z.B.: TP(-2|-4); HP(0|5); HP(2|2)

$W = y \leq 5$

13. Der Funktionsgraph



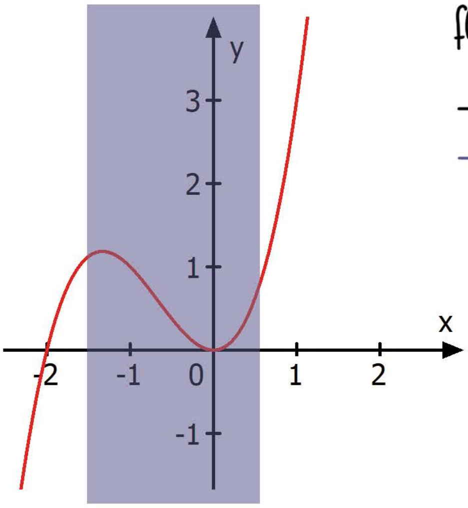
14. Die Randwerte

Randwerte können nur bei Funktionen auftreten, die Ränder besitzen. Dies ist dann der Fall, wenn nicht die komplette Funktion betrachtet wird, sondern lediglich ein Ausschnitt:

z.B. $x \in [-1;2]$ „x ist Element von…" → Es wird lediglich der Bereich zwischen -1 und 2 auf der x-Achse betrachtet! Der untere Rand ist also -1 und der obere Rand 2!

Randwerte können bei der Untersuchung von Extrema und Wendepunkten auftreten!

Bei Extrema



$f(x) = x^3 + 2x^2 \quad x \in [-1{,}5;\, 0{,}5]$

→ $HP(-\frac{4}{3} \mid 1{,}2)$ und $TP(0 \mid 0)$

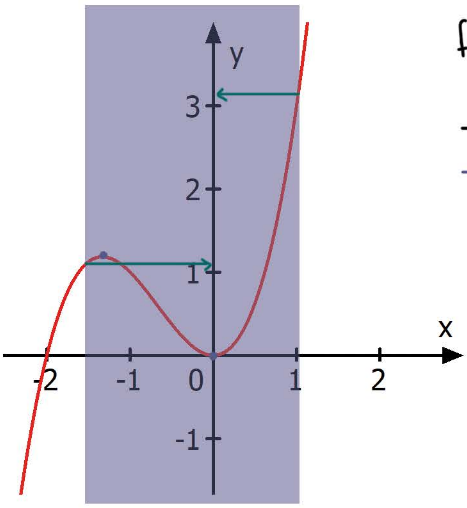
→ Randuntersuchung: unterer Rand und oberer Rand in die Funktion einsetzen.

$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^3 + 2 \cdot (-1{,}5)^2 = 1{,}13$

Deutung: 1,13 ist weder höher als der HP, noch tiefer als der TP → kein Randextremum.

$f(0{,}5) = 0{,}5^3 + 2 \cdot 0{,}5^2 = 0.625$

Deutung: 0,625 ist weder höher als der HP, noch tiefer als der TP → kein Randextremum.



$f(x) = x^3 + 2x^2 \quad x \in [-1{,}5;\, 1]$

→ $HP(-\frac{4}{3} \mid 1{,}2)$ und $TP(0 \mid 0)$

→ Randuntersuchung: unterer Rand und oberer Rand in die Funktion einsetzen

$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^3 + 2 \cdot (-1{,}5)^2 = 1{,}13$

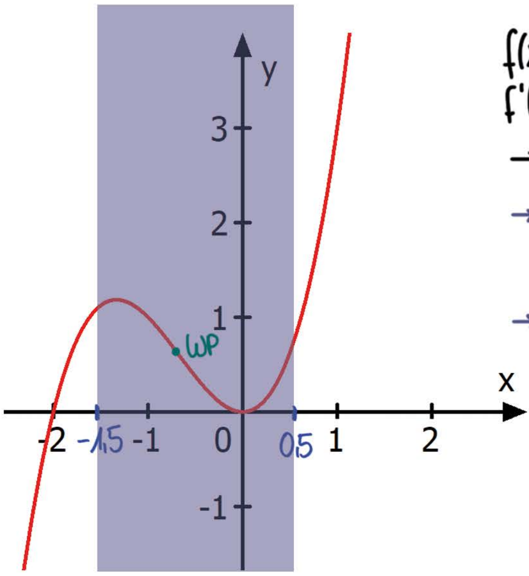
Deutung: 1,13 ist weder höher als der HP, noch tiefer als der TP → kein Randextremum

$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^3 = 3$

Deutung: 3 ist höher als die y-Koordinate des HP's → hier liegt ein Randextremum vor!

Bei Wendepunkten

Bei den Wendepunkten wird die Steigung in den WP's mit den Steigungen in den Rändern verglichen.



$f(x) = x^3 + 2x^2 \quad x \in [-1{,}5; 0{,}5]$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$\rightarrow WP(-0{,}67; 0{,}6)$

$\rightarrow$ Steigung im WP:

$f'(-0{,}67) = 3 \cdot (-0{,}67)^2 + 4 \cdot (-0{,}67) = -1{,}3$

$\rightarrow$ Steigung in den Rändern:

$f'(-1{,}5) = 3 \cdot (-1{,}5)^2 + 4 \cdot (-1{,}5) = 0{,}75$

$f'(0{,}5) = 3 \cdot (0{,}5)^2 + 4 \cdot (0{,}5) = 2{,}75$

Deutung: Im Wendepunkt ist die stärkste Abnahme. In der oberen Grenze die stärkste Zunahme!

Aufgabe 13:

Gegeben ist die Funktion f(x). Bestimme das absolute Maximum bzw. das absolute Minimum!

1. $f(x) = -2x^2 + 4x, \quad x \in [0;3]$

Die Lösung findest du auf Seite 90.

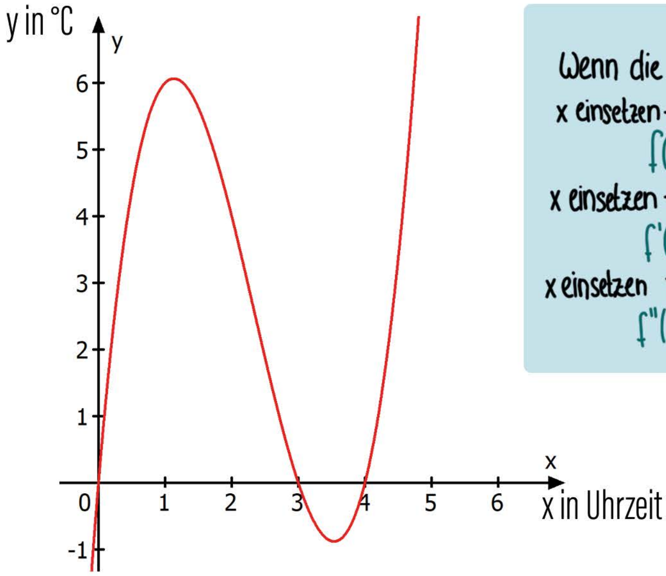
Aufgabe 14:

Gegeben ist die Funktion f(x). In welcher Stelle ist die Änderungsrate am größten?

1. $f(x) = x^3 + 6x^2, \quad x \in [-3;2]$

Die Lösung findest du auf Seite 91.

15. Textaufgaben



Wenn die Funktion keine Änderungrate ist, gilt:

x einsetzen ↘ $f(x)$ = „y-Koordinate"

x einsetzen ↘ $f'(x)$ = „Steigung"

x einsetzen ↘ $f''(x)$ = „Krümmung"

1. Wie viel °C ist es um 2 Uhr?

   → $f(2)$ ausrechnen

2. Um wie viel Uhr ist es 1°C?

   → $f(x)=1$ lösen

3. Um wie viel Uhr ändert sich die Temperatur um 2°C?

   → $f'(x)=2$ lösen

4. Um wie viel °C ändert sich die Temperatur um 1 Uhr?

   → $f'(1)$ ausrechnen

5. Wann beträgt die Temperatur 0 Grad?

   → Nullstellen → $f(x)=0$ ausrechnen

6. Wie viel Grad sind es zu Beobachtungsbeginn?

   → y-Achsenschnitt → $f(0)$ lösen

7. Wann wird die höchste bzw. tiefste Temperatur erreicht?

   → HP | TP ausrechnen (x-Koordinate)

8. Wann ändert sich die Temperatur am stärksten?

   → WP ausrechnen (x-Koordinate)

16. Schnittpunkte (Funktionen)

Die Schnittpunkte von zwei Funktionen berechnest du, indem du die beiden gegebenen Funktionen gleichsetzt.

$$f(x)=g(x)$$

Diese Gleichung kannst du anschließend nach Null auflösen und die Verfahren bzw. Strategien, die du aus der Nullstellenberechnung kennst, anwenden. Vergesse anschließend nicht die Berechnung der y-Koordinate. Hierbei spielt es keine Rolle, ob die berechnete(n) x-Koordinate(n) in f(x) oder g(x) eingesetzt wird.

Beispiel:

$f(x)=x^2+1$ und $g(x)=2x+1$

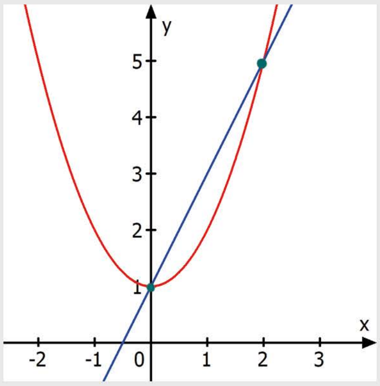
$\rightarrow f(x)=g(x)$

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 2x+1 && \mid -1 \\ x^2 &= 2x && \mid -2x \\ x^2-2x &= 0 && \mid () \\ x(x-2) &= 0 && \mid \text{SvNP} \end{aligned}$$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x_1=0 \qquad x-2=0 \quad \mid +2$

$\qquad\qquad x_2=2$



$g(0)=2\cdot 0+1=1 \quad \rightarrow SP_1(0|1)$

$g(2)=2\cdot 2+1=4+1=5 \quad \rightarrow SP_2(2|5)$

Aufgabe 15:

Gegeben sind die Funktionen f(x) und g(x). Berechne den/die Schnittpunkt(e) der beiden Funktionen:

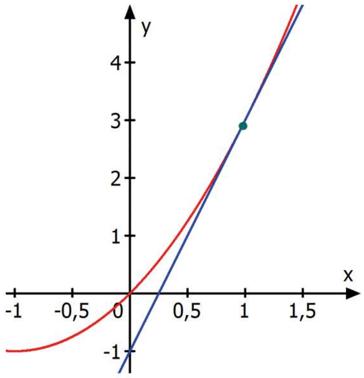
$$f(x)=x^2+3x \quad \text{und} \quad g(x)=x+3$$

Die Lösung findest du auf Seite 91.

17. Spezielle Geraden

Die Tangente

Die Tangente ist eine Gerade (also hat sie die Form $y=m \cdot x+b$), die mithilfe eines Punktes einer Funktion aufgestellt wird und dieselbe Steigung hat wie die Funktion in diesem Punkt!



Beispiel: $f(x)=x^2+2x$ in $x_0=1$

1.) $f(1)=1^2+2\cdot 1=1+2=3 \rightarrow y_0=3$

2.) $f'(x)=2x+2$

$f'(1)=2\cdot 1+2=2+2=4 \rightarrow m=4$

3.) $3=4\cdot 1+b$

$3=4+b \quad |-4$

$-1=b \rightarrow b=-1$

4.) $t: y=4x-1$

Schritte:

1.) y-Koordinate:
→ x_0 in f(x) einsetzen

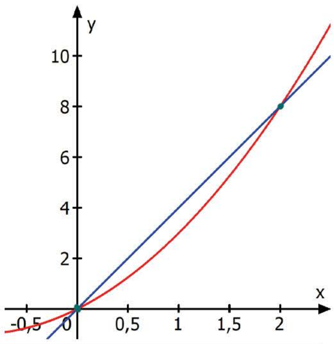
2.) Steigung m:
→ x_0 in f'(x)

3.) b berechnen:
→ x_0, y_0 und m in $y=m \cdot x+b$

4.) Tangente aufstellen
→ m und b in $y=m \cdot x+b$

Die Sekante

Die Sekante ist eine Gerade (also hat sie die Form $y=m \cdot x+b$), die mithilfe zweier Punkte einer Funktion aufgestellt wird!



Beispiel: $f(x)=x^2+2x$, in $[\underset{x_1}{0};\underset{x_2}{2}]$

1.) $f(0)=0^2+2\cdot 0=0+0=0 \rightarrow y_1=0 \rightarrow P(0|0)$

$f(2)=2^2+2\cdot 2=4+4=8 \rightarrow y_2=8 \rightarrow Q(2|8)$

2.) $m=\frac{8-0}{2-0}=4 \rightarrow m=4$

3.) $0=4\cdot 0+b$

$0=b \rightarrow b=0$

4.) $s: y=4x+0$

$s: y=4x$

Schritte:

1.) y-Koordinate:
→ x_e in f(x) einsetzen

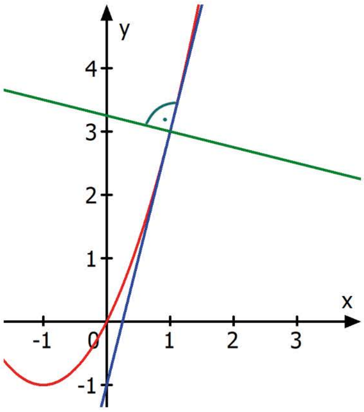
2.) Steigung m:
→ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

3.) b berechnen:
→ x_0, y_0 und m in $y=m \cdot x+b$

4.) Sekante aufstellen
→ m und b in $y=m \cdot x+b$

Die Normale

Die Normale ist eine Gerade (also hat sie die Form $y=m \cdot x+b$), die senkrecht zur Tangenten ist. Sie schneiden sich also in einem 90 Grad Winkel!



Beispiel: $f(x)=x^2+2x$ in $x_0=1$

1.) $f(1)=1^2+2\cdot 1=1+2=3 \rightarrow y=3$

2.) $f'(x)=2x+2$

$m=-\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{2\cdot 1+2}=-\frac{1}{4}$

3.) $3=-\frac{1}{4}\cdot 1+b$

$3=-\frac{1}{4}+b \quad |+\frac{1}{4}$

$\frac{13}{4}=b$

4.) $n: y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$

Schritte:

1.) y-Koordinate:
→ x_0 in f(x) einsetzen

2.) Steigung m:
→ $m=-\frac{1}{f'(x_0)}$

3.) b berechnen:
→ x_0, y_0 und m in $y=m \cdot x+b$

4.) Normale aufstellen
→ m und b in $y=m \cdot x+b$

Aufgabe 16:

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Tangente auf:

1. $f(x)=-2x^2+6x$ in $x_0=-1$

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Sekante auf:

2. $g(x)=x^3-4x$ in $[0;3]$

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Normalen auf:

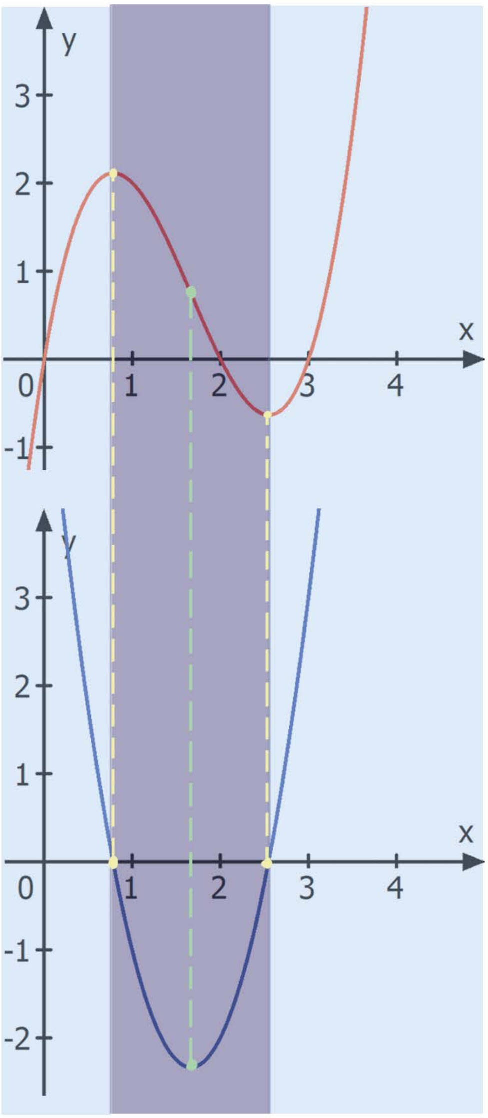
3. $h(x)=-x^2+x$ in $x_0=1$

Die Lösung findest du auf Seite 92

18. Zusammenhang von f & f'

Die NEW-Regel verdeutlicht auf eine sehr einfache Art und Weise den graphischen Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung. Dabei steht N für die Nullstellen, E für die Extrema, W für die Wendepunkte und SP für den Sattelpunkt! Diese Regel kann dir zum Beispiel dabei helfen zu einer gegebenen Ausgangsfunktion die Ableitung zu zeichnen oder aber allgemeine Aussagen über diesen Zusammenhang zu tätigen!

f(x)	N	E	W	./.	steigend	fallend	SP
f'(x)	./.	N	E	W	oberhalb der x-Achse	unterhalb der x-Achs	N berührend



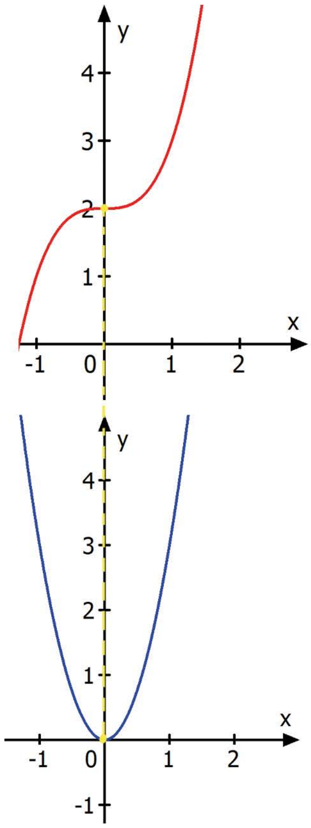
E → N : Bei der x-Koordinate der Hoch- und Tiefpunkte der Ausgangsfunktion hat die zugehörige Ableitung Nullstellen.

W → E : Bei der x-Koordinate des Wendepunktes der Ausgangsfunktion hat die zugehörige Ableitung einen Extrempunkt.

→ In den Bereichen, in denen die Ausgangsfunktion steigend ist, ist die zugehörige Ableitung oberhalb der x-Achse.

→ In den Bereichen, in denen die Ausgangsfunktion fallend ist, ist die zugehörige Ableitung unterhalb der x-Achse.

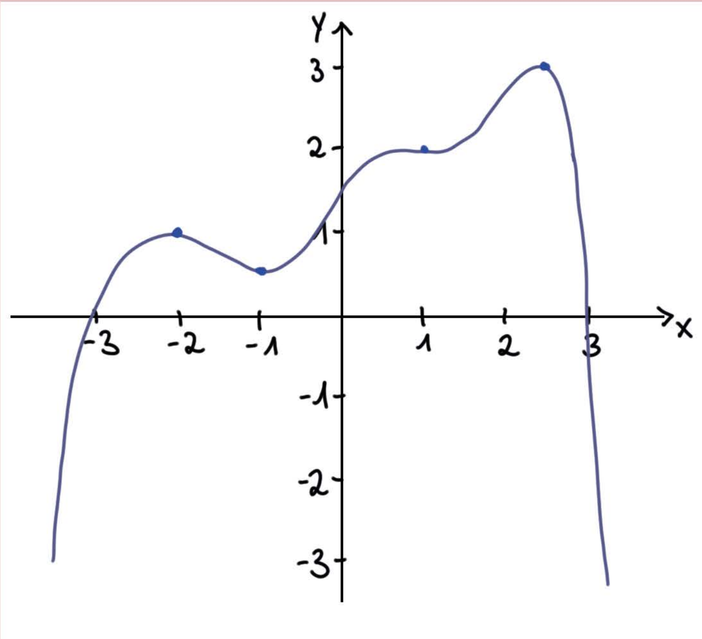
f(x)	N	E	W	⁒	steigend	fallend	SP
f'(x)	⁒	N	E	W	oberhalb der x-Achse	unterhalb der x-Achs	N berührend



SP → N: Bei der x-Koordinate des Sattelpunktes der Ausgangsfunktion hat die zugehörige Ableitung eine berührende Nullstelle.

Aufgabe 17:

Zeichne den zugehörigen Graphen der Ableitungsfunktion!



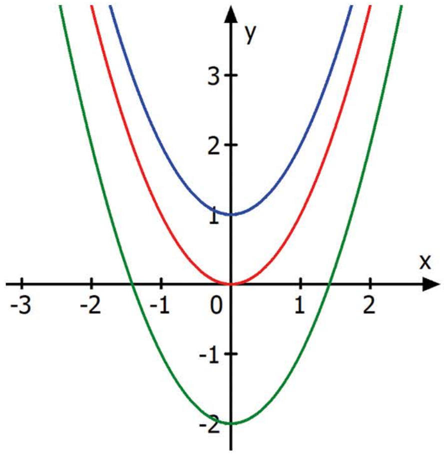
Die Lösung findest du auf Seite 93.

19. Funktionsscharen

Was sind Funktionsscharen?

Eine Funktionktionsschar ist eine Funktionsvorschrift, die unendlich viele Funktionen repräsentiert! Dabei ist der Parameter (hier a) ein Platzhalter für unendlich viele Zahlen.

$f_a = x^2 + a,\ a \in \mathbb{R}$



z.B $a = 0 \rightarrow f_0(x) = x^2 + 0 = x^2$

$a = 1 \rightarrow f_1(x) = x^2 + 1$

$a = -2 \rightarrow f_{-2}(x) = x^2 - 2$

Diese Funktionen lassen sich zusammenfassen mit: $f_a(x) = x^2 + a$

Der Scharparameter

Der Scharparameter ist ein Platzhalter für eine Zahl.
Eine Variable ist nicht dasselbe wie ein Scharparameter.

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Nullstellen
- Y-Achsenschnittstelle
- Grenzwertverhalten
- Symmetrie
- Ableitungen
- Extrema
- Wendepunkt
- Monotonie
- Krümmung

Genauso berechnen wie ohne einen Parameter! Den Parameter wie eine Zahl behandeln!

Die Fallunterscheidung

Wenn der Parameter a aus den reellen Zahlen stammt, dann brauchst du manchmal eine Fallunterscheidung, da der Parameter sowohl positiv, negativ, als auch Null sein kann! Dies ist besonders häufig bei der Extremaberechnung in der hinreichenden Bedingung der Fall!

Beispiel: $f_a(x) = x^3 - 3ax^2 + 2 \; ; \; a \in \mathbb{R}$

1) $f_a'(x) = 3x^2 - 6ax$

$f_a''(x) = 6x - 6a$

2) notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$

$3x^2 - 6ax = 0 \quad |()$

$x(3x - 6a) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1 = 0$

$3x - 6a = 0 \quad |+6a$

$3x = 6a \quad |:3$

$x_2 = 2a$

Auch hier können alle Verfahren, die du von der „normalen" Nullstellenberechnung kennst, abgefragt werden. Das Schema hilft dir dabei die richtige Strategie herauszufinden!

3) hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

Fallunterscheidung:

	$a<0$	$a>0$	$a=0$
$f_a''(0) = 6 \cdot 0 - 6a = -6a$	$>0 \rightarrow$ TP	$<0 \rightarrow$ HP	$=0 \rightarrow$ SP
$f_a''(2a) = 6 \cdot 2a - 6a = 12a - 6a = 6a$	$<0 \rightarrow$ HP	$>0 \rightarrow$ TP	$=0 \rightarrow$ SP

$f_a'''(0) = -6 \neq 0$

4) y-Koordinate:

$f_a(0) = 0^3 - 3a \cdot 0^2 + 2 = 2 \rightarrow EP_1(0|2)$

Extrempunkt, da je nachdem welche Zahl für das „a" eingesetzt wird, ein TP oder ein HP herauskommt.

→ Ein Punkt ohne Parameter: Alle Funktionen dieser Schar gehen durch diesen Punkt!

$f_a(2a) = (2a)^3 - 3a \cdot (2a)^2 + 2$

$= 8a^3 - 3a \cdot 4a^2 + 2$

$= 8a^3 - 12a^3 + 2$

$= -4a^3 + 2 \quad \rightarrow EP_2(2a|-4a^3+2)$

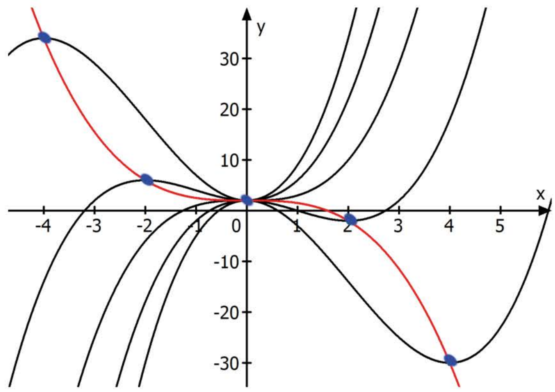
→ Ein Punkt mit Parameter! Die Funktionen dieser Schar haben, je nachdem welchen Wert a annimmt, einen unterschiedlichen Extrempunkt/Sattelpunkt:

$a=1 \rightarrow f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \rightarrow EP_2(2 \cdot 1|-4 \cdot 1^3 + 2) \rightarrow EP_2(2|-2)$

$a=0 \rightarrow f_0(x) = x^3 + 2 \rightarrow SP_2(2 \cdot 0|-4 \cdot 0^3 + 2) \rightarrow SP_2(0|2)$

Die Ortskurve

Die Ortskurve ist diejenige Kurve, die die charakteristischen Punkte einer Schar, wie zum Beispiel die Tiefpunkte miteinander verbindet. Genauso kann man eine Ortskurve für die Hochpunkte, die Wendepunkte oder aber für die Sattelpunkte aufstellen. Das Vorgehen ist immer das Gleiche!



Beispiel: $EP_a(2a \mid -4a^3+2)$

1.) $2a = x \quad | :2$

2.) $a = \frac{x}{2}$

3.) $o(x) = -4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 2$

4.) $ = -\cancel{4}^{1} \cdot \frac{x^3}{\cancel{8}_2} + 2$

$ = -\frac{1}{2}x^3 + 2$

Schritte:

1.) x-Koordinate gleich x setzen
2.) nach dem Parameter auflösen
3.) in y-Koordinate einsetzen
4.) vereinfachen

Aufgabe 18:

Gegeben ist die Funktionsschar:

$f_a(x) = 4x^2 + 8ax + 4 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$

Berechne
1. Die Nullstellen in Abhängigkeit von a
2. Die Extrema in Abhängigkeit von a
3. Für welche Werte von a liegen die Extrema auf der y-Achse?
4. Für welche Werte von a liegen die Extrema auf der x-Achse?

Die Lösung findest du auf Seite 94.

20. Steckbriefaufgaben

Was sind Steckbriefaufgaben?

Bei Steckbriefaufgaben sind die Eigenschaften einer Funktion gegeben und die zugehörige Funktionsvorschrift ist gesucht.

Fester Ablauf:

Die Funktionsermittlung erfolgt nach einem festen Ablauf:

1.) Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen.
2.) Symmetrie gegeben? Wenn ja, allgemeine Funktionsgleichung anpassen.
3.) Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS).
4.) LGS lösen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additions-, oder Gaußverfahren).
5.) Berechnete Parameter in allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.
6.) Wenn nötig, die hinreichenden Bedingungen überprüfen.

Übersetzungshilfen (Schritt 3)

Text	Gleichung(en)
... geht durch den Punkt P(1/3)	$f(1)=3$
... hat eine Nullstelle bei x=2	$f(2)=0$
... berührt die x-Achse bei x=-3	$f(-3)=0$ und $f'(-3)=0$
... schneidet die y-Achse bei y=-1	$f(0)=-1$
... hat einen TP/HP bei P(1/4)	$f(1)=4$ und $f'(1)=0$

Text	Gleichung(en)
... hat eine Hoch(Tief-)stelle bei x=4	$f'(4)=0$
... hat einen WP bei W(-1/3)	$f(-1)=3$ und $f''(-1)=0$
... hat einen SP bei S(3/6)	$f(3)=6$, $f'(3)=0$ und $f''(3)=0$
... besitzt bei x=1 die Steigung 5	$f'(1)=5$
... hat in x=2 die selbe Steigung wie y=6x+1	$f'(2)=6$
... hat in x=4 die Tangente y= 2x+1	$f(4)=9$ und $f'(4)=2$
... die Tangente in P(1/5) ist parallel zur Geraden y=4x	$f(1)=5$ und $f'(1)=4$

Beispiel

Gesucht ist eine punktsymmetrische Funktion 3. Grades, die im Punkt P(1/2) einen Hochpunkt besitzt!

1. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

2. $f(x)=ax^3+\cancel{bx^2}+cx+\cancel{d}=ax^3+cx$ $\rightarrow$ 2 Unbekannte $\rightarrow$ 2 Gleichungen

3. $HP(1/2) \rightarrow f(1)=2 \rightarrow a\cdot 1^3+c\cdot 1=2$

$\quad \text{I} \quad a+c=2$

$\rightarrow f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=3ax^2+c$

$\rightarrow 3a\cdot 1^2+c=0$

$\rightarrow \text{II} \quad 3a+c=0$

4. I nach c auflösen und in II einsetzen

$a+c=2 \quad |-a$

$c=2-a$

$3a+2-a=0 \quad |-2$

$2a=-2 \quad |:2 \quad \rightarrow a=-1$

a in c einsetzen und ausrechnen

$$c = 2 - a \qquad | a = -1$$
$$\rightarrow c = 2 - (-1)$$
$$= 2 + 1 \qquad \rightarrow c = 3$$

5. $f(x) = -1x^3 + 3x$

6. Überprüfen der Bedingungen für den HP(1|2):

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \quad \rightarrow f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 3 = 0 \checkmark$$
$$f''(x) = -6x \quad \rightarrow f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 \checkmark$$

$$\rightarrow f(x) = -1x^3 + 3x$$

Trassierungsaufgaben

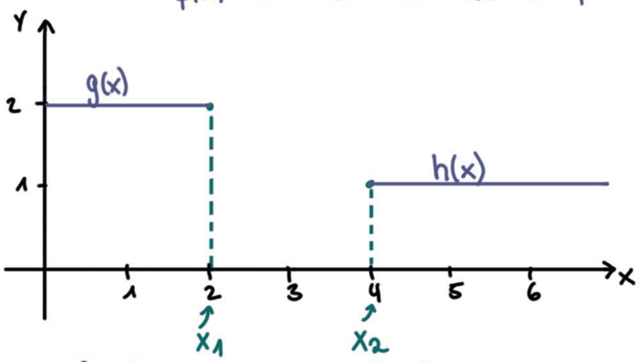
Das Ziel von Trassierungsaufgaben ist es, zwei gegebene Funktionen, die zum Beispiel zwei Straßen repräsentieren, zu verbinden. Je nachdem, welche Anforderungen an die gesuchte Funktion gestellt werden, brauchst du hier eine Funktion 3. oder aber 5. Grades!

... gesucht ist eine Funktion, die knickfrei ist

Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

... gesucht ist eine Funktion, die ruckfrei ist

Funktion 5. Grades: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$



Bedingungen:

ohne Sprung $\rightarrow f(x_1) = g(x_1)$ und $f(x_2) = h(x_2)$

ohne Knick (knickfrei) $\rightarrow f'(x_1) = g'(x_1)$ und $f'(x_2) = h'(x_2)$

ohne Krümmungsruck (ruckfrei) $\rightarrow f''(x_1) = g''(x_1)$ und $f''(x_2) = h''(x_2)$

Aufgabe 19:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die einen Wendepunkt in (0/1) und einen Hochpunkt in (1/2) besitzt!

Die Lösung findest du auf Seite 95.

21. Extremwertaufgaben

Was sind Extremwertaufgaben?

Bei Extremwertaufgaben/Optimierungsaufgaben soll eine Größe, wie zum Beispiel der Flächeninhalt, der Umfang, das Volumen etc. möglichst groß oder möglichst klein werden. In der Regel ist hier eine weitere Größe bekannt (Variante 1), oder aber mindestens ein Punkt liegt auf einer gegebenen Funktion (Variante 2).

Fester Ablauf

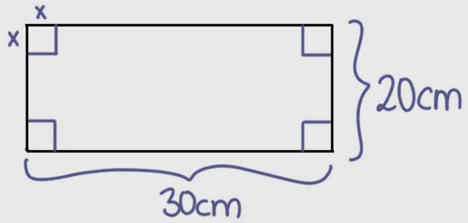
Extremwertaufgaben haben einen festen Ablauf:

0.) Skizze
1.) Hauptbedingung HB: Was soll maximal bzw. minimal werden?
2.) Nebenbedingung NB: Aus gegebener Größe eine oder mehrere Gleichungen erstellen. Ggfs. den Definitionsbereich bestimmen.
3.) Zielfunktion ZF: Nebenbedingung nach einer Unbekannten auflösen und in die Hauptbedingung einsetzen. Vereinfachen!
4.) Extrema berechnen.
5.) Weitere, gesuchte Größen berechnen.
6.) Wenn nötig, Randüberprüfung.

Variante 1

Aus einem rechteckigen Stück Pappe (20cm*30cm) soll eine Schachtel gefaltet werden, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten werden und die so entstandenen Seiten hochgeklappt werden. Wie ist die Länge x zu wählen, mit $0<x<10$ damit das Volumen maximal wird?
Berechne alle Seitenlängen und das Volumen!

0.) Skizze:



1.) HB: $V = a \cdot b \cdot c$

2.) NB: $a = 30 - 2x$
$b = 20 - 2x$
$c = x$

3.) ZF: $V(x) = (30-2x)\cdot(20-2x)\cdot x$ | vereinfachen
$= (600 - 60x - 40x + 4x^2)\cdot x$
$= 600x - 100x^2 + 4x^3 \rightarrow V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

4.) Extrema: $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$
$V''(x) = 24x - 200$

notw. Bed.: $V'(x)=0$

$12x^2 - 200x + 600 = 0$ | $:12$
$x^2 - \frac{50}{3}x + 50 = 0$ | pq mit $p = -\frac{50}{3}$ und $q = 50$
$x_{1/2} = -\frac{-\frac{50}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{50}{3}}{2}\right)^2 - 50}$

$= \frac{25}{3} \pm 4{,}41$
$x_1 = \frac{25}{3} + 4{,}41 = 12{,}74 \longrightarrow$ nicht in $[0;10] \rightarrow$ nicht relevant
$x_2 = \frac{25}{3} - 4{,}41 = 3{,}92$

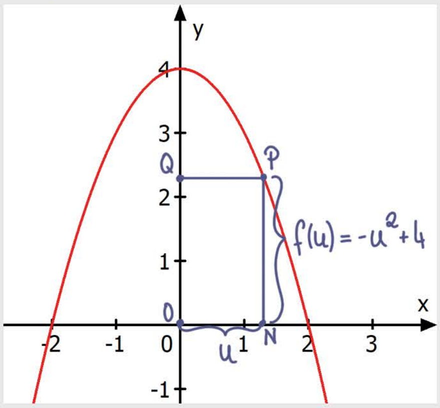
hinr. Bed.: $V'(x)=0$ und $V''(x) \neq 0$
$V''(3{,}92) = 24 \cdot 3{,}92 - 200 = -105{,}92 < 0 \rightarrow$ Maximum

5.) $x = 3{,}92$
$a = 30 - 2\cdot 3{,}92 = 22{,}16 \longrightarrow 22{,}16\,cm$
$b = 20 - 2\cdot 3{,}92 = 12{,}16 \longrightarrow 12{,}16\,cm$
$c = 3{,}92 \longrightarrow 3{,}92\,cm$
$V = 22{,}16 \cdot 12{,}16 \cdot 3{,}92 = 1056{,}31 \longrightarrow 1056\,cm^3$

Variante 2

Gegeben ist die Funktion $f(x)=-x^2+4$. Sei P(u/f(u)) ein Punkt auf dem Graphen von f(x) mit 0<u<2. Der Ursprung O, der Punkt P, der Punkt Q(0/f(u)) und der Punkt N(u/0) begrenzen ein Rechteck. Wie lauten die Koordinaten von P, wenn das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt haben soll und wie groß ist dieser?

0.) Skizze



1.) HB: $A = a \cdot b$

2.) NB: $a = u$
$b = -u^2 + 4$

3.) ZF: $A(u) = u \cdot (-u^2+4)$ | vereinfachen
$= -u^3 + 4u$

4.) Extrema: $A'(u) = -3u^2 + 4$
$A''(u) = -6u$

notw. Bed.: $A'(u) = 0$

$-3u^2 + 4 = 0 \quad |-4$

$-3u^2 = -4 \quad |:(-3)$

$u^2 = \frac{4}{3} \quad |\sqrt{\ }$

$u_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15$

$u_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1{,}15$ nicht relevant (s. $0<u<2$)

hinr. Bed.: $A'(u) = 0$ und $A''(u) \neq 0$

$A''(1{,}15) = -6 \cdot 1{,}15 = -6{,}9 < 0 \rightarrow$ Maximum

5.) $u = 1{,}15$

$a = 1{,}15 \rightarrow 1{,}15$ LE

$b = -1{,}15^2 + 4 = 2{,}7 \rightarrow 2{,}7$ LE

P(1,15 | 2,7)

$A = 1{,}15 \cdot 2{,}7 = 3{,}105 \rightarrow 3{,}105$ FE

Aufgabe 20:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 18$

A(u/0), B(-u/0), C(u/f(u)) und D(-u/f(-u)) bilden die Eckpunkte eines Rechtecks. Wie ist u zu wählen, damit der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß wird? Wie lang sind die Seiten und welchen Flächeninhalt besitzt dieses Rechteck?

Die Lösung findest du auf Seite 96.

22. Änderungsraten

Grundsätzlich werden zwei Arten von Änderungsraten unterschieden: die momentane Änderungsrate und die durchschnittliche Änderungsrate. Die momentane Änderungsrate entspricht der Steigung der Tangente. Die durchschnittliche Änderungsrate entspricht der Steigung der Sekante, die mithilfe von zwei Punkten ermittelt wird.

Die momentane Änderungsrate:

Die momentane Änderungsrate beschreibt die Steigung in einem Punkt einer Funktion bzw. in einer Stelle und wird mithilfe der h-Methode oder mithilfe der ersten Ableitung berechnet. Liefern diese Rechnungen ein positives Ergebnis, also eine positive Steigung, dann ist der zugehörige Graph der Funktion steigend, wenn negativ, dann fallend und wenn Null, dann weder steigend noch fallend.

Beispiel mit h-Methode:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f(x) = 2x^2+1 \text{ in } x_0 = 1$$

1.) $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2.) $f(1+h) = 2\cdot(1+h)^2+1 = 2\cdot(1+2h+h^2)+1$
$= 2+4h+2h^2+1 = 2h^2+4h+3$
$f(1) = 2\cdot 1^2+1 = 2\cdot 1+1 = 2+1 = 3$

3.) $\lim_{h \to 0} \frac{2h^2+4h+3-3}{h}$

4.) $\lim_{h \to 0} \frac{2h^2+4h}{h}$

5.) $\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2h+4)}{\cancel{h}}$

6.) $2\cdot 0+4 = 4$

Schritte:

1.) x_0 in Formel einsetzen
2.) f(1+h) und f(1) bilden
3.) In Formel einsetzen
4.) Vereinfachen
5.) h ausklammern, kürzen
6.) Für h Null einsetzen und ausrechnen

Beispiel mit 1. Ableitung:

$f(x) = 2x^2 + 1$ in $x_0 = 1$

$f'(x) = 4 \cdot x$

$f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$

Deutung: Die Funktion f(x) hat in der Stelle x=1 die Steigung (momentane Änderungsrate) 4!

In Textaufgaben ist die momentane Änderungsrate häufig die Steigung bzw. die Veränderung in einem gegebenen ZeitPUNKT. Die durchschnittliche Änderungsrate die Steigung bzw. die Veränderung in einem gegebenen ZeitRAUM. Sie wird mithilfe des Differenzenquotienten berechnet.

Die durchschnittliche Änderungsrate:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Beispiel:

$f(x) = 2x^2 + 1$ in $[1;3]$

1.) $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3 \longrightarrow P(1|3)$

$f(3) = 2 \cdot 3^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19 \longrightarrow Q(3|19)$

2.) $m = \frac{19-3}{3-1}$

3.) $= \frac{16}{2} = 8 \longrightarrow m = 8$

Schritte:

1.) y-Koordinaten berechnen
2.) In Differenzenquotienten einsetzen
3.) Vereinfachen

Aufgabe 21:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x$

a) Berechne die momentane Änderungsrate in $x_0 = -1$ mithilfe der h-Methode.

b) Berechne die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der 1. Ableitung.

c) Berechne die durchschnittliche Änderungsrate in $x \in [0;2]$.

Die Lösung findest du auf Seite 97.

23. Allg. Exponentialfunktion

$$f(x) = c \cdot a^x$$

Mit Exponentialfunktionen lassen sich in der Regel Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse beschreiben, bei denen sich ein Anfangsbestand c in gleichen Zeitspannen um den selben Faktor a ändert!

	Exponentialle Zunahme	Exponentialle Abnahme
	Ein Hasenbestand mit anfangs 100 Hasen wächst monatlich um 20%.	Eine Bakterienkultur mit anfangs 20 Mio. Bakterien verringert sich monatlich um 10%.
Wachstums-faktor	$a = 1 + p$ (in Dezimalzahl) $\rightarrow p = 0{,}2$ $a = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$	$a = 1 - p$ (in Dezimalzahl) $\rightarrow p = 0{,}1$ $a = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
Anfangs-bestand	$c = 100$	$c = 20$ (in Mio.)
Funktion	$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	$g(x) = 20 \cdot 0{,}9^x$

Aus zwei Punkten aufstellen:

Gesucht: $f(x) = c \cdot a^x$

Gegeben: $P(0|10)$ und $Q(2|40)$

$\uparrow$ c (Die y-Koordinate des Punktes, der als x-Koordinate die Null bestitzt, ist das c)

$f(x) = 10 \cdot a^x$ | zweiten Punkt einsetzen

$40 = 10 \cdot a^2$ | nach a auflösen $\rightarrow$:10

$4 = a^2$ | $\sqrt{\ }$

$2 = a$ $\rightarrow$ da $a > 0$, ist nur das positive Ergebnis von Bedeutung!

$\rightarrow f(x) = 10 \cdot 2^x$

Wachstumsfaktor a aus zwei Punkten bestimmen:

$P(1|4)$ und $Q(7|20)$

$x_2 - x_1 = 7 - 1 = 6$ → 6 Zeitschritte
→ von 4 auf 20

→ $4 \cdot a^6 = 20 \quad |:4$
$a^6 = 5 \quad |\sqrt[6]{}$
$a = \sqrt[6]{5} \approx 1{,}3$

Deutung: Der Wachstumsfaktor ist $a = 1{,}3$.
→ $(a-1) \cdot 100 = \%$
$(1{,}3 - 1) \cdot 100 = 0{,}3 \cdot 100 = 30\%$
Der Wert nimmt innerhalb eines Zeitintervalls um 30% zu!

Wichtige Eigenschaften:

- $f(x) = c \cdot a^x, \quad c > 0, \quad a > 0, \ a \neq 1$
  c ist positiv
  a ist immer positiv und ungleich 1
- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen
- Ihr Funktionsgraph verläuft oberhalb der x-Achse
- y-Achsenschnitt: $A(0|c)$
- Die x-Achse ist eine Asymptote
- Umwandlung in e-Funktion:
  $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow c \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$
  $3 \cdot 4^x \rightarrow 3 \cdot e^{\ln(4) \cdot x}$
- Ableitung: $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
- Stammfunktion: $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$

Aufgabe 22:

1.) Bestimme diejenige allgemeine Exponentialfunktion, die durch die Punkte P(0/3) und Q(2/12) geht.
2.) Berechne den Funktionswert für x=1.
3.) Wann wird der Funktionswert 100 angenommen?
4.) Wandel die Funktion in eine e-Funktion um!
5.) Bilde die Ableitung und die Stammfunktion!
6.) Stelle die Tangente in x=1 auf!
7.) Berechne den Flächeninhalt der Funktion in $x \in [0;2]$.

Die Lösung findest du auf Seite 98.

24. Funktionstransformation

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot (x + c)) + d \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Unter der Funktionstransformation versteht man das Verändern einer Funktion. Hierbei stehen die Buchstaben a, b, c und d für verschiedene Veränderungen und haben somit auch eine andere Aufgabe bzw. Auswirkung auf eine gegebene Ausgangsfunktion.

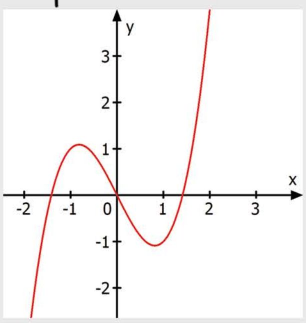
Der Buchstabe a:

$$g(x) = a \cdot f(x)$$

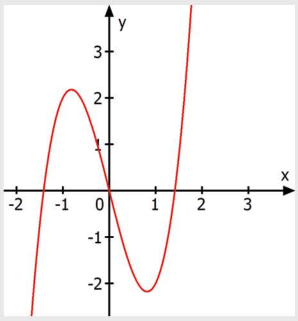
a: Streckung bzw. Stauchung in Richtung der y-Achse

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 2x$



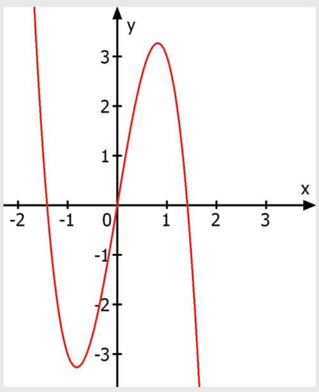
$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (x^3 - 2x) = 2x^3 - 4x$



Es gilt: $a > 1 \rightarrow$ Streckung

$0 < a < 1 \rightarrow$ Stauchung

Wenn das a zudem noch negativ ist, dann wird der Graph außerdem an der x-Achse gespiegelt!



$h(x) = -3 \cdot f(x)$

$= -1 \cdot 3 \cdot f(x)$

Spiegelung an x-Achse

Streckung um den Faktor 3.

→ Nullstellen bleiben unverändert

→ Höhe der Extrema ändert sich

Der Buchstabe b:

$g(x) = f(b \cdot x)$

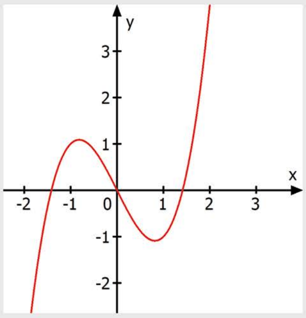
- b: Streckung bzw. Stauchung in Richtung der x-Achse
- Berechnung des Streckfaktors: $\frac{1}{b}$

Es gilt: $b > 1$ → Streckfaktor $\frac{1}{b}$ → Stauchung
$0 < b < 1$ → Streckfaktor $\frac{1}{b}$ → Streckung

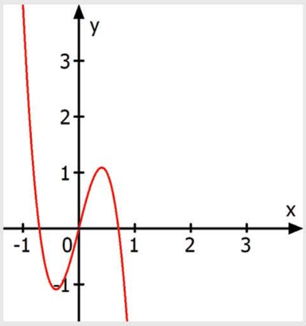
Wenn das b zudem noch negativ ist, dann wird der Graph außerdem an der y-Achse gespiegelt!

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 2x$



$g(x) = f(-2 \cdot x) = (-2x)^3 - 2 \cdot (-2x)$



$g(-2x) = g(-1 \cdot 2 \cdot x)$

Spiegelung an y-Achse

Faktor: $\frac{1}{2}$ → Stauchung

→ Nullstellen ändern sich

→ Höhe der Extrema bleibt unverändert

Der Buchstabe c:

$g(x) = f(x + c)$

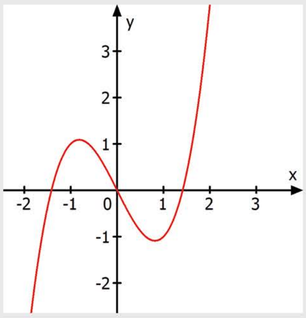
c: Verschiebung nach rechts bzw. links

Es gilt: $c > 0$ → Verschiebung nach links
$c < 0$ → Verschiebung nach rechts

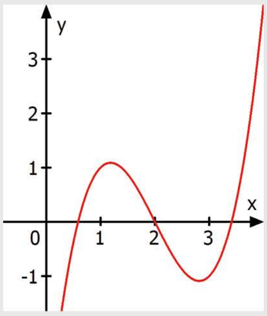
Beispiel:

$c = -2$ → 2 Einheiten nach rechts

$f(x) = x^3 - 2x$



$g(x) = f(x - 2) = (x-2)^3 - 2 \cdot (x - 2)$



Der Buchstabe d:

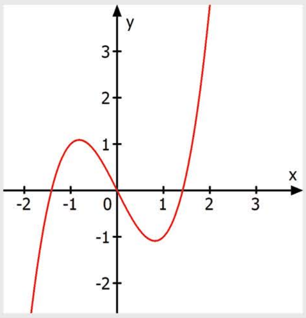
$g(x) = f(x) + d$

d: Verschiebung nach oben bzw. unten

Es gilt: $d > 0 \rightarrow$ Verschiebung nach oben
$d < 0 \rightarrow$ Verschiebung nach unten

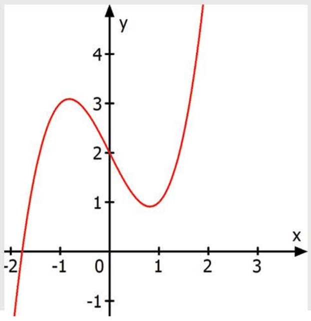
Beispiel:

$f(x) = x^3 - 2x$



$g(x) = f(x) + 2 = x^3 - 2x + 2$

$d = 2 \rightarrow$ 2 Einheiten nach oben



Insgesamt:

$f(x) = x^3$

$\rightarrow g(x) = 2 \cdot f(-3 \cdot (x - 2)) - 1$

Spiegelung an y & Stauchung um 3 (x-Richtung)

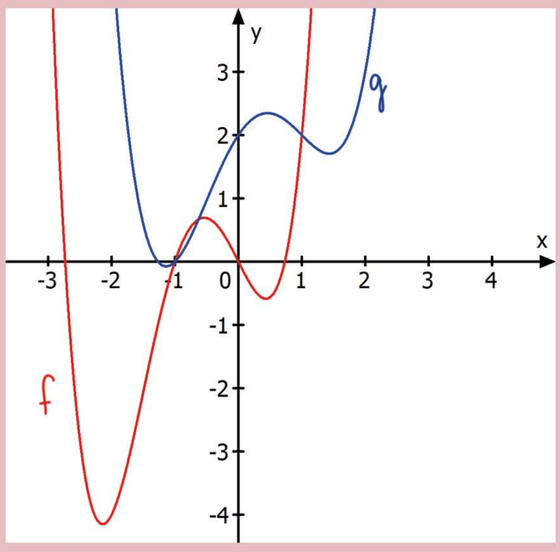
Streckung um 2 entlang y!

2 nach rechts

1 nach unten

Aufgabe 23:

Beschreibe durch welche Veränderungen der Graph von g(x) aus dem Graphen von f(x) hervorgeht und gebe die Parameter a, b, c und d an!



Die Lösung findest du auf Seite 99.

25. Stammfunktion

Es gibt nicht nur für die Bestimmung der Ableitung wesentliche Regeln, sondern ebenfalls für die Ermittlung der Stammfunktion.

Die Potenzregel:

$$f(x) = a \cdot x^b \longrightarrow F(x) = \frac{a}{b+1} \cdot x^{b+1}$$

„Im Exponenten +1 rechnen und den aktuellen Koeffizienten („Vorzahl") durch den neuen Exponenten teilen!"
Hierbei stehen a und b für reelle Zahlen.

$$f(x) = 4 \cdot x^3 \rightarrow F(x) = \frac{4}{3+1} \cdot x^{3+1} = \frac{4}{4} \cdot x^4 = 1x^4 = x^4$$
$$g(x) = 9 \cdot x^4 \longrightarrow G(x) = \frac{9}{4+1} \cdot x^{4+1} = \frac{9}{5} \cdot x^5$$

Die Stammfunktion wird übrigens mit dem jeweiligen Großbuchstaben bezeichnet!

Die Summenregel:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \longrightarrow F(x) = G(x) \pm H(x)$$

„Alles was durch ein Plus oder Minus getrennt ist, wird einzeln aufgeleitet!"

$$f(x) = \underbrace{-x^3}_{1.} \underbrace{+6x^2}_{2.} \underbrace{-4x}_{3.} \underbrace{+1}_{4.} \longrightarrow F(x) = \underbrace{-\frac{1}{4}x^4}_{1.} \underbrace{+2x^3}_{2.} \underbrace{-2x^2}_{3.} \underbrace{+1x}_{4.}$$

Die Integrationskonstante C:

$$f(x) = 3x^2 + 6x \; \underset{\text{ableiten}}{\overset{\text{aufleiten}}{\rightleftarrows}} \; F(x)$$

$F(x) = x^3 + 3x^2 + 0{,}5$

$F(x) = x^3 + 3x^2$

$F(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

$F(x) = x^3 + 3x^2 + C \quad ; C \in \mathbb{R}$

Ausdruck um alle Stammfunktionen darzustellen!

Die Stammfunktion ist also nicht eindeutig, es gibt unendlich viele (da für C jede reelle Zahl eingesetzt werden kann).

Stammfunktion durch gegebenen Punkt:

Beispiel: $f(x) = 6x^2 + 4x - 1 \quad P(1|12)$

1.) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1x + C$
2.) $F(1) = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1 + C = 12$
3.) $2 + 2 - 1 + C = 12$
$3 + C = 12 \quad |-3$
$C = 9$
4.) $F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1x + 9$

Schritte:

1.) F(x)+C bilden
2.) Punkt einsetzen
3.) Nach C auflösen
4.) C in F(x)+C einsetzen

Aufgabe 24:

Gebe diejenige Stammfunktion von $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$ an, die durch $P(-1|15)$ geht!

Die Lösung findest du auf Seite 99.

Wichtige Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$-x + x \cdot \ln(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \cdot x^{\frac{1}{n}+1}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{\text{lin.Fkt}}$	$\frac{1}{(\text{lin.Fkt.})'} \cdot e^{\text{lin.Fkt.}}$

Eine Stammfunktion nachweisen:

Wenn deine Aufgabe darin besteht, dass du eine Stammfunktion nachweisen sollst, dann leitest du die gegebene Stammfunktion ab und zeigst, dass diese Ableitung der Ausgangsfunktion entspricht.

Es gilt: $F'(x) = f(x)$

Beispiel: Zeige, dass $F(x)=x^3+2x^2-5x+1$ eine Stammfunktion von $f(x)=3x^2+4x-5$!

$$F'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 5$$
$$= 3x^2+4x-5 = f(x)$$

Eine Stammfunktion der e-Funktion:

e-Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x
$\text{Zahl} \cdot e^x$	$\text{Zahl} \cdot e^x$
$e^{\text{lin. Fkt}}$	$\frac{1}{(\text{lin. Fkt})'} \cdot e^{\text{lin. Fkt.}}$

Beispiel:

$$f(x) = e^{3x+1} \longrightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x+1}$$

$$g(x) = 2 \cdot e^{8x-2} \longrightarrow G(x) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot e^{8x-2} = \frac{1}{4} \cdot e^{8x-2}$$

Aufgabe 25:

Bestimme die Stammfunktion von

a) $f(x) = e^{5x+1}$

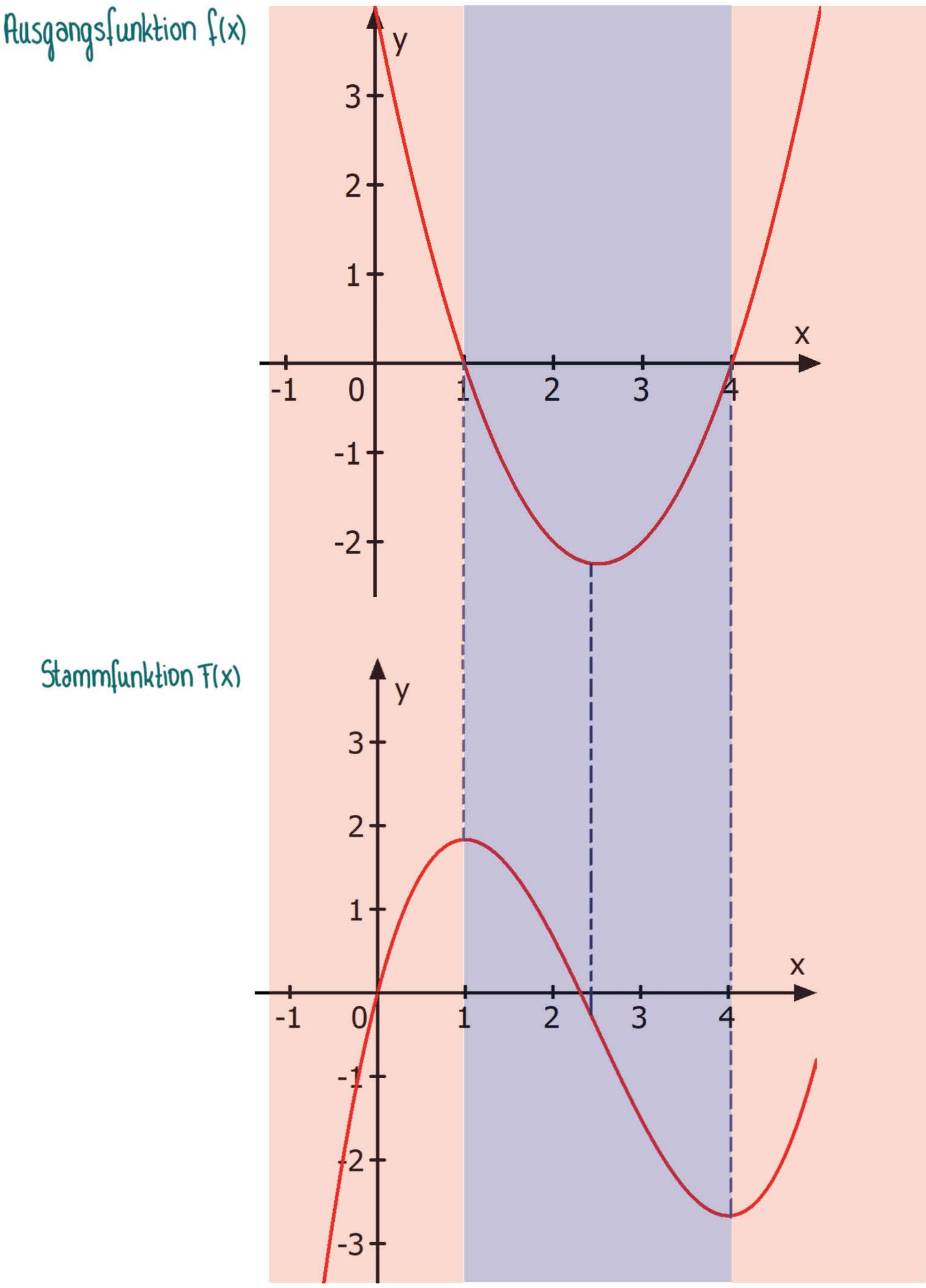
b) $g(x) = -4 \cdot e^{3x-2}$

Die Lösung findest du auf Seite 100.

26. Zusammenhang von f & F

Wie auch beim Zusammenhang zwischen der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung, gilt auch hier die NEW-Regel.

F (x)	N	E	W	⁒	steigend	fallend	SP
f (x)	⁒	N	E	W	oberhalb der x-Achse	unterhalb der x-Achse	N berührend



27. Integrale berechnen

Das unbestimmte Integral:

Beim unbestimmten Integral sind keine Grenzen gegeben. Das Ergebnis des unbestimmten Integrals ist die Stammfunktion mit der Integrationskonstante +C:

Beispiel:

$$\int (4x^3 + 2x^2 - 5x + 1)\,dx$$
$$= \frac{4}{3+1} \cdot x^{3+1} + \frac{2}{2+1} \cdot x^{2+1} - \frac{5}{1+1} x^{1+1} + 1x + C$$
$$= \frac{4}{4} \cdot x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 1x + C$$
$$= 1x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 1x + C$$

Das bestimmte Integral:

Beim bestimmten Integral sind die Grenzen gegeben. Das Ergebnis des bestimmten Integrals ist der sogenannte Integralwert!

Beispiel:

$$\int_0^1 (8x^3 + 6x^2 - 4x - 1)\,dx$$
$$= \left[2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 1x\right]_0^1$$
$$= 2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1 - (2 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 1 \cdot 0)$$
$$= 2 + 2 - 2 - 1 - (0)$$
$$= 1$$

allgemein:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \left[F(x)\right]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

"Erst die Stammfunktion bilden, dann die obere Grenze einsetzen minus die untere Grenze einsetzen. Wenn du die untere Grenze einsetzt, dann musst du diesen Teil in eine Klammer setzen!"

Aufgabe 26:

Berechne das Integral:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 4)\,dx$$

Die Lösung findest du auf Seite 100.

28. Flächeninhalt

Mit x-Achse:

Mithilfe des Integrals lässt sich der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse exakt rechnerisch bestimmen. Hier musst du immer im Vorfeld die Nullstellen berechnen. Wenn du keinen Bereich in der Aufgabenstellung gegeben hast, dann sind die Nullstellen die Grenzen. Und es gilt:

Anzahl an Nullstellen -1 = Anzahl an Integrale

Wenn du einen Bereich (wie in diesem Beispiel) gegeben hast, dann musst du diesen Bereich genau dann aufteilen, wenn eine Nullstelle in diesem Bereich liegt, andernfalls nicht!

Beispiel:

Berechne den Flächeninhalt von $f(x) = -x^2+4$ in $x \in [0;3]$ mit der x-Achse.

1.) $-x^2+4=0 \quad |-4$

$-x^2=-4 \quad |:(-1)$

$x^2=4 \quad |\sqrt{}$

$x_1=-2$ (nicht relevant, da nicht in $[0;3]$)

$x_2=2$ → Intervall aufteilen!

2.) $[0;2] \cup [2;3]$

3.) A_1: $\int_0^2 -x^2+4\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$

$= -\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3+4\cdot 0\right)$

$= -\frac{8}{3}+8-(0)$

$= \frac{16}{3}$ FE*

A_2: $\int_2^3 -x^2+4\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_2^3$

$= \left|-\frac{1}{3}\cdot 3^3+4\cdot 3 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2\right)\right|$

$= \left|-9+12-\left(-\frac{8}{3}+8\right)\right|$

$= \left|3-\left(\frac{16}{3}\right)\right|$

$= \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$ FE*

4.) $A_1+A_2 = \frac{16}{3}+\frac{7}{3} = \frac{23}{3}$ FE*

Schritte:

1.) Nullstellen berechnen
2.) Wenn nötig, Bereich in Intervalle aufteilen
3.) Integrale berechnen
→ wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Einzelne Flächeninhalte addieren

*FE bedeutet Flächeneinheiten. Dies kannst du als Einheit verwenden, wenn keine in der Aufgabenstellung angegeben ist!

Zwischen zwei Funktionen:

Mithilfe des Integrals lässt sich nicht nur der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse, sondern ebenfalls der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen bestimmen! Hierbei sind nicht mehr die Nullstellen, sondern die Schnittstellen dieser beiden Funktionen entscheidend. Ins Integral kommt die Differenz dieser beiden Funktionen. Auch hier gilt: Ein Flächeninhalt kann nicht negativ sein. Liefert das Integral ein negatives Ergebnis, dann setze den Betrag!

Beispiel:

Berechne den Flächeninhalt zwischen $f(x)=x^2-4$ und $g(x)=2x-4$:

1.) $f(x)=g(x)$:

$$\begin{aligned} x^2-4 &= 2x-4 && \mid +4 \\ x^2 &= 2x && \mid -2x \\ x^2-2x &= 0 && \mid () \\ x(x-2) &= 0 && \mid \text{SvNP} \\ x_1=0 \quad x-2 &= 0 && \mid +2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

2.) $f(x)-g(x) = x^2-4-(2x-4) = x^2-4-2x+4 = x^2-2x$

3.)
$$\int_0^2 (x^2-2x)\,dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3-1x^2\right]_0^2$$
$$= \left|\tfrac{1}{3}\cdot 2^3-1\cdot 2^2-\left(\tfrac{1}{3}\cdot 0^3-2\cdot 0^2\right)\right|$$
$$= \left|\tfrac{8}{3}-4-(0)\right|$$
$$= \left|-\tfrac{4}{3}\right| = \tfrac{4}{3}\ \text{FE}$$

4.) entfällt

Schritte:

1.) Schnittstelle(n) berechnen
2.) f(x)-g(x) bilden
3.) Integral(e) berechnen
→ wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Wenn mehrere Integrale: Einzelne Flächeninhalte addieren

Aufgabe 27:

Berechne den Flächeninhalt zwischen

$$f(x)=x^2-2 \quad \text{und} \quad g(x)=-2x+1$$

Die Lösung findest du auf Seite 100.

Mehr als zwei Schittstellen mit x-Achse:

Wenn die Funktion mehr als zweimal die waagerechte x-Achse schneidet, dann brauchst du mehr als ein Integral zur Flächenberechnung. Es gilt:

"Anzahl an Nullstellen"-1="Anzahl an Integrale"

Das erste Integral geht dann von der kleinsten bis zur nächstgrößeren Nullstelle. Das nächste Integral, dann von dieser bis zur wiederum größeren Nullstelle, usw.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

1) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \quad |()$

$x(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$x_1 = 0 \qquad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad |pq$

$x_{2/3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{4-3}$

$= 2 \pm \sqrt{1}$

$= 2 \pm 1$

$x_2 = 2 - 1 = 1$

$x_3 = 2 + 1 = 3$

2) $I_1: [0;1]$ und $I_2: [1;3]$

3) $A_1: \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{4}{3}\cdot 1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{4}{3}\cdot 0^3 + \frac{3}{2}\cdot 0^2\right)$

$= \frac{5}{12}$ FE

$A_2: \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^3$

$= \left|\frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{4}{3}\cdot 3^3 + \frac{3}{2}\cdot 3^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{4}{3}\cdot 1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2\right)\right|$

$= \left|-\frac{9}{4} - \left(\frac{5}{12}\right)\right|$

$= \left|-\frac{8}{3}\right|$

$= \frac{8}{3}$ FE

4) $A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$ FE

Schritte:

1.) Nullstellen berechnen
2.) Wenn nötig, Bereich in Intervalle aufteilen
3.) Integrale berechnen
→ wenn Ergebnis negativ, dann Betrag
4.) Einzelne Flächeninhalte addieren

29. Parameter bestimmen

Wenn der Integralwert (das Ergebnis des Integrals) gegeben ist, dann lassen sich zum Beispiel die Parameter einer Funktionsschar bestimmen. Genauso kannst du auch eine unbekannte Grenze berechnen. Der grundlegenede Ablauf der Integralrechnung ändert sich allerdings nicht!

Grenze gesucht

Beispiel:

$$\int_a^2 (-6x^2+3x)\,dx = -10$$

1.) $\left[-2x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_a^2 = -10$

2.) $-2\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-\left(-2a^3+\frac{3}{2}a^2\right) = -10$

$-16+6+2a^3-\frac{3}{2}a^2 = -10$

3.) $-10+2a^3-\frac{3}{2}a^2 = -10 \quad |+10$

$2a^3-\frac{3}{2}a^2 = 0 \quad |()$

$a^2\left(2a-\frac{3}{2}\right) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$a^2 = 0 \quad |\sqrt{\ }$ $\qquad 2a-\frac{3}{2} = 0 \quad |+\frac{3}{2}$

$a_1 = 0$ $\qquad 2a = \frac{3}{2} \quad |:2 \rightarrow a_2 = \frac{3}{4}$

Schritte:

1.) Stammfunktion
2.) F(b)-F(a)= Integralwert
3.) Grenze berechnen
→ s. Lösungsstrategien für Nullstellen

Aufgabe 28:

Berechne die gesuchte Grenze b:

$$\int_0^b (-4x+8)\,dx = 6$$

Die Lösung findest du auf Seite 101.

Parameter gesucht

Beispiel:

$$\int_{-1}^{2}(-9x^2+ax)\,dx=3$$

1.) $[-3x^3+\frac{1}{2}ax^2]_{-1}^{2}=3$

2.) $-3\cdot 2^3+\frac{1}{2}a\cdot 2^2-(-3\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}a\cdot(-1)^2)=3$

$-24+2a-(3+\frac{1}{2}a)=3$

$-24+2a-3-\frac{1}{2}a=3$

3.) $-27+\frac{3}{2}a=3 \quad |+27$

$\frac{3}{2}a=30 \quad |:\frac{3}{2}$

$a=20$

Schritte:

1.) Stammfunktion
2.) F(b)-F(a)= Integralwert
3.) Parameter berechnen

Aufgabe 29:

Berechne den Parameter:

$$\int_{0}^{1}(-6x^2+10ax)\,dx=14$$

Die Lösung findest du auf Seite 101.

30. Mittelwert

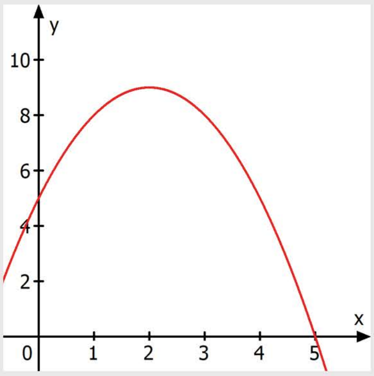
Den Mittelwert $\overline{m}$ aller Funktionswerte (y-Koordinaten) einer Funktion in einem bestimmten Bereich [a;b] berechnet man mit:

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Also ist $\overline{m}$ der Durchschnitt aller Funktionswerte in diesem Bereich!

Beispiel:

$f(x) = -x^2+4x+5$ repräsentiert die Flugkurve eines Balls. Hierbei steht x für die Weite in Metern und f(x) für die Höhe in Metern. Berechne die mittlere Flughöhe (=Durchschnittshöhe) des Balls für $x \in [0;5]$!



$$\begin{aligned}
\overline{m} &= \frac{1}{5-0} \cdot \int_0^5 (-x^2+4x+5)\,dx \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_0^5 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{3}\cdot 5^3+2\cdot 5^2+5\cdot 5-\left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3+2\cdot 0^2+5\cdot 0\right)\right] \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{125}{3}+50+25-(0)\right] \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{100}{3} \\
&= \frac{20}{3} \approx 6{,}67
\end{aligned}$$

Aufgabe 30:

Berechne den Mittelwert:

$f(x) = 9x^2-6x+3$ im Bereich $[0;2]$

Die Lösung findest du auf Seite 101.

31. Lösungen

Aufgabe 1:

Bestimme den maximalen Definitionsbereich:

1. $f(x) = \frac{3x}{x^2+2x+1}$
2. $g(x) = \sqrt{25-x}$
3. $h(x) = \ln(-2x-2)$

1.

$f(x) = \frac{3x}{x^2+2x+1}$ → Nullstellen des Nenners!

$x^2+2x+1=0 \quad | pq$ mit $p=2$ und $q=1$

$x_{1|2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1}$

$= -1 \pm \sqrt{1-1}$

$= -1 \pm 0 \rightarrow x = -1$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.

$g(x) = \sqrt{25-x}$ → Diskriminante ≥ 0!

$25 - x \geq 0 \quad |-25$

$-x \geq -25 \quad |:(-1)$

$x \leq 25$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^{\leq 25}$

3.

$h(x) = \ln(-2x-2)$ → Argument > 0!

$-2x-2 > 0 \quad |+2$

$-2x > 2 \quad |:(-2)$

$x < -1$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^{<-1}$

Aufgabe 2:

Berechne, wenn möglich, die Nullstellen dieser Funktionen!

1. $f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$
2. $g(x) = (-x^3 + 4x^2) \cdot e^{3x+1}$
3. $h(x) = 2 \cdot \sqrt{x-4} + 10$

1.

$f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$

$f(x) = 0 \rightarrow \quad 2x^5 - 8x^3 + 6x = 0 \quad |()$

$x(2x^4 - 8x^2 + 6) = 0 \quad |\text{SvNP}$ — Substitutionsmethode

$\boxed{x_1 = 0}$

$2x^4 - 8x^2 + 6 = 0 \quad | x^2 = z, \; x^4 = z^2$

$2z^2 - 8z + 6 = 0 \quad |:2$ — pq-Formel

$z^2 - 4z + 3 = 0 \quad | p = -4 \text{ und } q = 3$

$z_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$= 2 \pm \sqrt{1}$

$= 2 \pm 1$

$z_1 = 2 - 1 = 1 \quad | z = x^2$

$z_2 = 2 + 1 = 3 \quad | z = x^2$

$x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$ $\qquad x^2 = 3 \quad |\sqrt{\ }$

$\boxed{x_2 = 1, \; x_3 = -1}$ $\qquad \boxed{x_4 = \sqrt{3}, \; x_5 = -\sqrt{3}}$

2.

$g(x) = (-x^3 + 4x^2) \cdot e^{3x+1}$

$g(x) = 0 \rightarrow \quad (-x^3 + 4x^2) \cdot e^{3x+1} = 0 \quad |\text{SvNP}$

$-x^3 + 4x^2 = 0 \quad |() \qquad e^{3x+1} \neq 0$

$x^2(-x + 4) = 0 \quad |\text{SvNP}$

$x^2 = 0 \quad |\sqrt{\ } \qquad -x + 4 = 0 \quad |-4$

$\boxed{x_1 = 0} \qquad -x = -4 \quad |:(-1)$

$\boxed{x_2 = 4}$

3.

$h(x) = 2 \cdot \sqrt{x-4} + 10 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 4}$

$h(x) = 0 \rightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{x-4} + 10 = 0 \quad |-10$

$2 \cdot \sqrt{x-4} = -10 \quad |:2$

$\sqrt{x-4} = -5 \quad |()^2$

$x - 4 = 25 \quad |+4$

$x = 29$

Probe: $2 \cdot \sqrt{29-4} + 10 = 0 \qquad 10 + 10 = 0$

$2 \cdot 5 + 10 = 0 \qquad 20 = 0$ ↯ $\boxed{h(x) \text{ hat keine Nullstellen!}}$

Aufgabe 3:

Prüfe, ob die gegebenen Funktionen symmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder weder noch sind!

1. $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$
2. $g(x) = -x^3 + x - 3$
3. $h(x) = (2x^2+1) \cdot e^{3x^2}$

1.

$f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$

$\rightarrow f(x) = f(-x)$?

$f(-x) = 5 \cdot (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^2 + 7$

$= 5x^4 - 6x^2 + 7$

$=$

achsensymmetrisch zur y-Achse

2.

$g(x) = -x^3 + x - 3$

$\rightarrow g(x) = g(-x)$?

$g(-x) = -(-x)^3 + (-x) - 3$

$= x^3 - x - 3$

$\neq$

$\rightarrow g(-x) = -g(x)$?

$-g(x) = -(-x^3 + x - 3)$

$= x^3 - x + 3$

$\neq$

weder achsensymmetrisch zu y, noch punktsymmetrisch zum Ursprung!

3.

$h(x) = (2x^2+1) \cdot e^{3x^2}$

$\rightarrow h(x) = h(-x)$?

$h(-x) = (2 \cdot (-x)^2 + 1) \cdot e^{3 \cdot (-x)^2}$

$= (2x^2+1) \cdot e^{3x^2}$

$=$

achsensymmetrisch zur y-Achse!

Aufgabe 4:

Bestimme das Globalverhalten der gegebenen Funktionen für x gegen Unendlich und x gegen negativ Unendlich!

1. $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$
2. $g(x) = -x^3 + x$
3. $h(x) = (2x^2+1) \cdot e^{3x}$

1.

$f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 7$

1.Fall: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2.Fall: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2.

$g(x) = -x^3 + x$

1.Fall: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2.Fall: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3.

$h(x) = (2x^2+1) \cdot e^{3x}$

1.Fall: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$$\underbrace{\underbrace{(2x^2+1)}_{+\infty} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{+\infty}}_{+\infty}$$

2.Fall: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$

$$\underbrace{\underbrace{(2x^2+1)}_{+\infty} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{0}}_{0}$$

Aufgabe 5:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = 4x^2 + 6x - 1$
2. $g(x) = x^3 - x + 4$
3. $h(x) = -x^2 + x$

1.

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 1$$
$$= 4x^2 + 6x^1 - 1x^0$$

$$f'(x) = 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 6 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 1 \cdot 0 \cdot x^{0-1}$$
$$= 8x^1 + 6x^0 - 0$$
$$= 8x + 6 \cdot 1$$
$$= 8x + 6$$

2.

$$g(x) = x^3 - x + 4$$
$$= 1x^3 - 1x^1 + 4x^0$$

$$g'(x) = 1 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 1 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 4 \cdot 0 \cdot x^{0-1}$$
$$= 3x^2 - 1x^0 + 0$$
$$= 3x^2 - 1 \cdot 1$$
$$= 3x^2 - 1$$

3.

$$h(x) = -x^2 + x$$
$$= -1x^2 + 1x^1$$

$$h'(x) = -1 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 1 \cdot x^{1-1}$$
$$= -2x^1 + 1x^0$$
$$= -2x + 1 \cdot 1$$
$$= -2x + 1$$

Aufgabe 6:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x)=\sqrt[7]{x^3}$
2. $g(x)=-4\cdot\sqrt[3]{x}$
3. $h(x)=-\sqrt{x}$

1.
$f(x)=\sqrt[7]{x^3}=x^{\frac{3}{7}}$
$f'(x)=\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{3}{7}-1}$
$=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$

3.
$h(x)=-\sqrt[2]{x^1}=-x^{\frac{1}{2}}$
$h'(x)=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$
$=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2.
$g(x)=-4\cdot\sqrt[3]{x^1}=-4x^{\frac{1}{3}}$
$g'(x)=-4\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}$
$=-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Aufgabe 7:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x)=(-3x+8)^5$
2. $g(x)=3e^{7x+1}$
3. $h(x)=\ln(-x^2+4x)$

1.
$f(x)=(-3x+8)^5 \rightarrow$ $u(x)=x^5$ $\quad u'(x)=5x^4$
$v(x)=-3x+8$ $\quad v'(x)=-3$

Kettenregel: $f(x)=u(v(x))\rightarrow f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$

$f'(x)=5\cdot(-3x+8)^4\cdot(-3)=-15\cdot(-3x+8)^4$

2.
$g(x)=3e^{7x+1} \rightarrow$ $u(x)=3e^x$ $\quad u'(x)=3e^x$
$v(x)=7x+1$ $\quad v'(x)=7$

Kettenregel: $f(x)=u(v(x))\rightarrow f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$

$g'(x)=3e^{7x+1}\cdot 7=21e^{7x+1}$

3.
$h(x)=\ln(-x^2+4x)\rightarrow$ $u(x)=\ln(x)$ $\quad u'(x)=\frac{1}{x}$
$v(x)=-x^2+4x$ $\quad v'(x)=-2x+4$

Kettenregel: $f(x)=u(v(x))\rightarrow f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$

$h'(x)=\frac{1}{-x^2+4x}\cdot(-2x+4)=\frac{-2x+4}{-x^2+4x}$

Aufgabe 8:

Bestimme die erste Ableitung der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = 2x \cdot (3x+5)^4$
2. $g(x) = x^2 \cdot e^{-6x+1}$
3. $h(x) = -4x \cdot \ln(2x+1)$

1.

$f(x) = 2x \cdot (3x+5)^4$ → Produkt - und Kettenregel

$u(x) = 2x \qquad u'(x) = 2$

$v(x) = (3x+5)^4 \qquad v'(x) = 12 \cdot (3x+5)^3$

NR

$f'(x) = 2 \cdot (3x+5)^4 + 2x \cdot 12 \cdot (3x+5)^3$

$= \boxed{2 \cdot (3x+5)^4 + 24x \cdot (3x+5)^3}$

NR: $(3x+5)^4$

$s(x) = x^4 \qquad s'(x) = 4x^3$

$t(x) = 3x+5 \qquad t'(x) = 3$

$\rightarrow 4 \cdot (3x+5)^3 \cdot 3 = 12 \cdot (3x+5)^3$

2.

$g(x) = x^2 \cdot e^{-6x+1}$ → Produkt- und Kettenregel

$u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$

$v(x) = e^{-6x+1} \qquad v'(x) = -6e^{-6x+1}$

NR

$g'(x) = 2x \cdot e^{-6x+1} + x^2 \cdot (-6e^{-6x+1})$

$= e^{-6x+1} \cdot (2x + x^2 \cdot (-6))$

$= \boxed{e^{-6x+1} \cdot (-6x^2 + 2x)}$

NR: e^{-6x+1}

$s(x) = e^x \qquad s'(x) = e^x$

$t(x) = -6x+1 \qquad t'(x) = -6$

$\rightarrow e^{-6x+1} \cdot (-6) = -6e^{-6x+1}$

3.

$h(x) = -4x \cdot \ln(2x+1)$ → Produkt - und Kettenregel

$u(x) = -4x \qquad u'(x) = -4$

$v(x) = \ln(2x+1) \qquad v'(x) = \frac{2}{2x+1}$

NR

$h'(x) = -4 \cdot \ln(2x+1) + (-4x) \cdot \frac{2}{2x+1}$

$= \boxed{-4\ln(2x+1) - \frac{8x}{2x+1}}$

NR: $\ln(2x+1)$

$s(x) = \ln(x) \qquad s'(x) = \frac{1}{x}$

$t(x) = 2x+1 \qquad t'(x) = 2$

$\rightarrow \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$

Aufgabe 9:

Bestimme die Extrema der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
2. $g(x) = 8x \cdot e^{-x}$

1.

$f(x) = x^3 - 3x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$3x^2 = 3 \quad | :3$

$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \rightarrow TP$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \rightarrow HP$

y-Koordinaten:

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1 \rightarrow$ TP(1|1)

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 3 = 5 \rightarrow$ HP(-1|5)

2.

$g(x) = 8x \cdot e^{-x}$

Ableitungen:

$u(x) = 8x \qquad u'(x) = 8$

$v(x) = e^{-x} \qquad v'(x) = -e^{-x}$

$g'(x) = 8e^{-x} + 8x \cdot (-e^{-x})$

$= e^{-x}(8 - 8x)$

$= e^{-x}(-8x + 8)$

$u(x) = e^{-x} \qquad u'(x) = -e^{-x}$

$v(x) = -8x + 8 \qquad v'(x) = -8$

$g''(x) = -e^{-x} \cdot (-8x + 8) + e^{-x} \cdot (-8)$

$= e^{-x}(8x - 8 - 8)$

$= e^{-x}(8x - 16)$

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$e^{-x}(-8x + 8) = 0 \quad |$ SvNP

$e^{-x} \neq 0 \qquad -8x + 8 = 0 \quad | -8$

$-8x = -8 \quad | :(-8)$

$x = 1$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0$ und $g''(x) \neq 0$

$g''(1) = e^{-1} \cdot (8 \cdot 1 - 16) \approx -2{,}9 < 0 \rightarrow HP$

y-Koordinate:

$g(1) = 8 \cdot 1 \cdot e^{-1} \approx 2{,}9 \rightarrow$ HP(1|2,9)

Aufgabe 10:

Bestimme die Wendepunkte der gegebenen Funktionen!

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
2. $g(x) = 8x \cdot e^{-x}$

1.

$f(x) = x^3 - 3x + 3$
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$f''(x) = 6x$
$f'''(x) = 6$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$
$6x = 0 \quad |:6$
$x = 0$

hinr. Bed.: $f''(x)=0$ und $f'''(x) \neq 0$
$f'''(0) = 6 \neq 0 \rightarrow WP$

y-Koordinate:
$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow \boxed{WP(0|3)}$

2.

$g(x) = 8x \cdot e^{-x}$
$\left.\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x}(-8x+8) \\ g''(x) &= e^{-x}(8x-16) \end{aligned}\right\}$ s. Aufgabe 6

$u(x) = e^{-x} \qquad u'(x) = -e^{-x}$
$v(x) = 8x - 16 \qquad v'(x) = 8$
$g'''(x) = -e^{-x} \cdot (8x-16) + e^{-x} \cdot 8$
$= e^{-x}(-8x+16+8)$
$= e^{-x}(-8x+24)$

notw. Bed.: $g''(x) = 0$
$e^{-x}(8x-16) = 0 \quad |SvNP$
$e^{-x} \neq 0 \qquad 8x - 16 = 0 \quad |+16$
$8x = 16 \quad |:8$
$x = 2$

hinr. Bed.: $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$
$g'''(2) = e^{-2}(-8 \cdot 2 + 24) \approx 1{,}08 \neq 0$

y-Koordinate:
$g(2) = 8 \cdot 2 \cdot e^{-2} \approx 2{,}2$
$\rightarrow \boxed{WP(2|2{,}2)}$

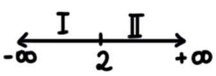
Aufgabe 11:

Bestimme die Bereiche, in denen die Funktion steigend bzw. fallend ist.

1. $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$

1.

$f(x) = -3x^2 + 12x + 1$
$f'(x) = -6x + 12$
$-6x + 12 = 0 \quad |-12$
$-6x = -12 \quad |:(-6)$
$x = 2$



I $(-\infty; 2)$ $f'(0) = -6 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \rightarrow \boxed{\text{steigend}}$
II $(2; +\infty)$ $f'(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0 \rightarrow \boxed{\text{fallend}}$

Aufgabe 12:

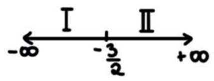
Bestimme die Bereiche, in denen die Funktion nach rechts bzw. links gekrümmt ist.

1. $f(x) = -x^3 - 4{,}5x^2$

1.

$f(x) = -x^3 - 4{,}5x^2$
$f'(x) = -3x^2 - 9x$
$f''(x) = -6x - 9$

$-6x - 9 = 0 \quad | +9$
$-6x = 9 \quad | :(-6)$
$x = -\frac{3}{2}$



$\mathrm{I}\ (-\infty; -\frac{3}{2})$ $\quad f''(-2) = -6 \cdot (-2) - 9 = 3 > 0$ links gekrümmt
$\mathrm{II}\ (-\frac{3}{2}; +\infty)$ $\quad f''(0) = -6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$ rechts gekrümmt

Aufgabe 13:

Gegeben ist die Funktion f(x). Bestimme das absolute Maximum bzw. das absolute Minimum!

1. $f(x) = -2x^2 + 4x \quad$ in $x \in [0;3]$

1.

$f(x) = -2x^2 + 4x$
$f'(x) = -4x + 4$
$f''(x) = -4$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$-4x + 4 = 0 \quad | -4$
$-4x = -4 \quad | :(-4)$
$x = 1$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(1) = -4 < 0 \rightarrow$ HP

y-Koordinate:
$f(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 2$
$\rightarrow$ HP(1|2)

Randüberprüfung
$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$
$f(3) = -2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = -6 \quad \leftarrow$ absolutes Minimum
HP(1|2) $\quad \leftarrow$ absolutes Maximum

Aufgabe 14:

Gegeben ist die Funktion f(x). In welcher Stelle ist die Änderungsrate am größten?

1. $f(x) = x^3 + 6x^2, \quad x \in [-3;2]$

1.

$f(x) = x^3 + 6x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 12x$

$f''(x) = 6x + 12$

$f'''(x) = 6$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$6x + 12 = 0 \quad |-12$

$6x = -12 \quad |:6$

$x = -2$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(-2) = 6 \neq 0 \rightarrow$ WP

y-Koordinate:

$f(-2) = (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2$

$= -8 + 24 = 16 \rightarrow$ WP(-2|16)

Berechnung der Änderungen:

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) = -12$

$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) = -9$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 36 \leftarrow$ größte Änderungsrate

Aufgabe 15:

Gegeben sind die Funktionen f(x) und g(x). Berechne den/die Schnittpunkt(e) der beiden Funktionen.

1. $f(x) = x^2 + 3x$ und $g(x) = x + 3$

1.

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 3x = x + 3 \quad |-x$

$x^2 + 2x = 3 \quad |-3$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad |pq$

$x_{1|2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$

$= -1 \pm \sqrt{1+3}$

$= -1 \pm 2$

$x_1 = -1 + 2 = 1$

$x_2 = -1 - 2 = -3$

y-Koordinaten:

$g(1) = 1 + 3 = 4 \rightarrow SP_1(1|4)$

$g(-3) = -3 + 3 = 0 \rightarrow SP_2(-3|0)$

Aufgabe 16:

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Tangente auf!

1. $f(x) = -2x^2 + 6x$ in $x_0 = -1$

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Sekante auf!

2. $g(x) = x^3 - 4x$ in $[0;3]$

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Normalen auf!

3. $h(x) = -x^2 + x$ in $x_0 = 1$

---

1. $f(x) = -2x^2 + 6x$ in $x_0 = -1$

y: $f(-1) = -2\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) = -8$

m: $f'(x) = -4x + 6$

$f'(-1) = -4\cdot(-1) + 6 = 10$

b: $-8 = 10\cdot(-1) + b$

$-8 = -10 + b \quad |+10$

$2 = b$

$\rightarrow t: y = 10\cdot x + 2$

---

2. $g(x) = x^3 - 4x$ in $[0;3]$

y: $g(0) = 0^3 - 4\cdot 0 = 0$

$g(3) = 3^3 - 4\cdot 3 = 15$

m: $m = \frac{15-0}{3-0} = 5$

b: $0 = 5\cdot 0 + b$

$0 = b$

$\rightarrow s: y = 5x$

---

3. $h(x) = -x^2 + x$ in $x_0 = 1$

y: $h(1) = -1^2 + 1 = 0$

m: $h'(x) = -2x + 1$

$h'(1) = -2\cdot 1 + 1 = -1$

$m_n = -\frac{1}{-1} = 1$

b: $0 = 1\cdot 1 + b$

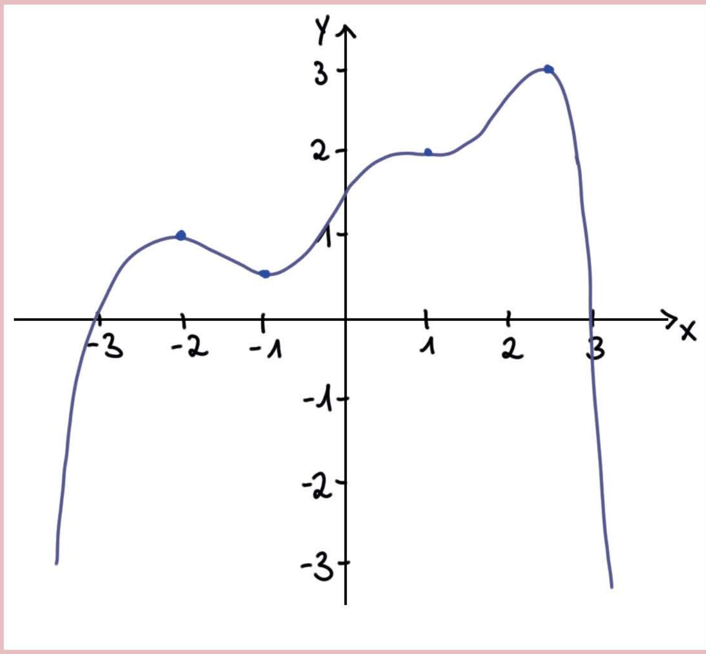
$0 = 1 + b \quad |-1$

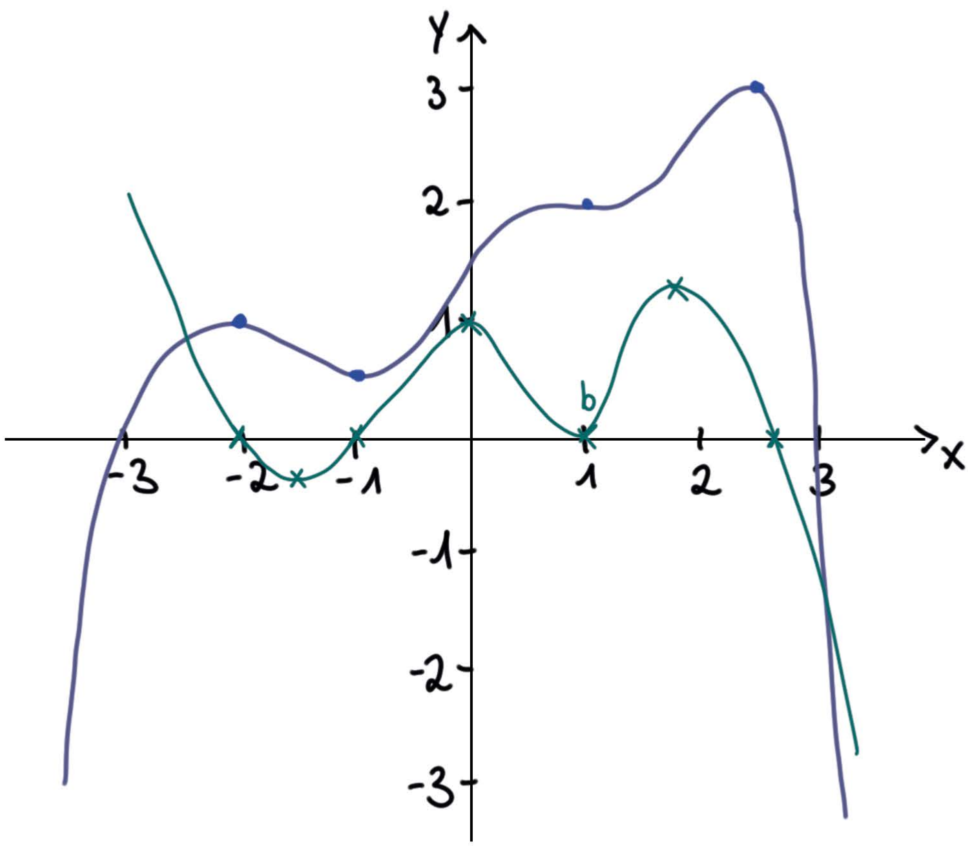
$-1 = b$

$\rightarrow n: y = 1\cdot x - 1$

Aufgabe 17:

Zeichne den zugehörigen Graphen der Ableitungsfunktion!





Aufgabe 18:

Gegeben ist die Funktionsschar:

$f_a(x) = 4x^2 + 8ax + 4$ mit $a \in \mathbb{R}$

Berechne
1. Die Nullstellen in Abhängigkeit von a
2. Die Extrema in Abhängigkeit von a
3. Für welche Werte von a liegen die Extrema auf der y-Achse?
4. Für welche Werte von a liegen die Extrema auf der x-Achse?

1.

$f_a(x) = 4x^2 + 8ax + 4 \ , a \in \mathbb{R}$

Nullstellen: $4x^2 + 8ax + 4 = 0 \quad | :4$

$x^2 + 2ax + 1 = 0 \quad |$ pq mit $p = 2a$ und $q = 1$

$x_{1|2} = -\frac{2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2 - 1}$

$= -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ → keine Lösung für $a^2 - 1 < 0 \quad | +1$

$a^2 < 1 \quad | \sqrt{\ }$

$a < 1$ und $a > -1 \rightarrow a \in (-1; 1)$

$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$

$x_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$

2.

Extrema: $f_a'(x) = 8x + 8a$

$f_a''(x) = 8$

notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$

$8x + 8a = 0 \quad | -8a$

$8x = -8a \quad | :8$

$x = -a$

hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(-a) = 8 > 0 \rightarrow TP$

y-Koordinate:

$f_a(-a) = 4 \cdot (-a)^2 + 8a \cdot (-a) + 4$

$= 4a^2 - 8a^2 + 4 = -4a^2 + 4$ → $TP(-a \mid -4a^2 + 4)$

3.

Auf y-Achse → x-Koordinate = 0

$-a = 0 \quad | :(-1)$

$a = 0$

4.

auf x-Achse → y-Koordinate = 0

$-4a^2 + 4 = 0 \quad | -4$

$-4a^2 = -4 \quad | :(-4)$

$a^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$a_1 = 1$

$a_2 = -1$

Aufgabe 19:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die einen Wendepunkt in (0/1) und einen Hochpunkt in (1/2) besitzt!

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

WP(0|1) → I $f(0) = 1 \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1$

II $f''(0) = 0 \quad 6a \cdot 0 + 2b = 0 \rightarrow 2b = 0 \,|:2 \rightarrow b = 0$

HP(1|2) → III $f(1) = 2 \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 2 \rightarrow a + b + c + d = 2$

→ IV $f'(1) = 0 \quad 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

I $d = 1$

II $b = 0$

III $a + b + c + d = 2 \quad | b = 0$ und $d = 1$

$a + 0 + c + 1 = 2 \quad | -1$

$a + c = 1$

IV $3a + 2b + c = 0 \quad | b = 0$

$3a + 2 \cdot 0 + c = 0$

$3a + c = 0$

III nach a auflösen:

$a + c = 1 \quad | -c$

$a = 1 - c$

a in IV

$3 \cdot (1 - c) + c = 0$

$3 - 3c + c = 0 \quad | -3$

$-2c = -3 \quad | :(-2)$

$c = 1{,}5$

c in a:

$a = 1 - c \quad | c = 1{,}5$

$a = 1 - 1{,}5$

$a = -0{,}5$

→ $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x + 1$

Probe für charakteristische Punkte:

$f'(x) = -1{,}5x^2 + 1{,}5$

$f''(x) = -3x$

$f'''(x) = -3$

WP(0|1)

→ $f''(0) = 0 \quad -3 \cdot 0 = 0$ ✓

→ $f'''(0) \neq 0 \quad -3 \neq 0$ ✓

HP(1|2)

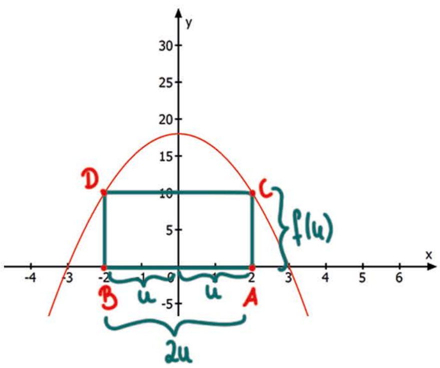
→ $f'(1) = 0 \quad -1{,}5 \cdot 1^2 + 1{,}5 = 0$ ✓

→ $f''(1) < 0 \quad -3 \cdot 1 = -3 < 0$ ✓

Aufgabe 20:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 18$.
A(u/0), B(-u/0), C(u/f(u)) und D(-u/f(-u)) bilden die Eckpunkte eines Rechtecks. Wie ist u zu wählen, damit der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß wird? Wie lang sind die Seiten und welchen Flächeninhalt besitzt dieses Rechteckes?

Skizze:



HB: $A = a \cdot b$

NB: $a = 2u$

$b = f(u) = -2u^2 + 18$

ZF: $A(u) = 2u \cdot (-2u^2 + 18u)$

$= -4u^3 + 36u$

Extrema: $A'(u) = -12u^2 + 36$

$A''(u) = -24u$

notw. Bed.: $A'(u) = 0$

$-12u^2 + 36 = 0 \quad | -36$

$-12u^2 = -36 \quad | :(-12)$

$u^2 = 3 \quad | \sqrt{\ }$

$u_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}7$

$u_2 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$

hinr. Bed.: $A'(u) = 0$ und $A''(u) \neq 0$

$A''(1{,}7) = -24 \cdot 1{,}7 = -40{,}8 < 0 \rightarrow$ Max.

$A''(-1{,}7) = -24 \cdot (-1{,}7) = 40{,}8 > 0 \rightarrow$ Min.

Seitenlängen:

$a = 2 \cdot u = 2 \cdot 1{,}7 = 3{,}4$ LE

$b = f(u) = f(1{,}7) = -2 \cdot 1{,}7^2 + 18 = 12{,}22$ LE

Flächeninhalt:

$A(1{,}7) = -4 \cdot 1{,}7^3 + 36 \cdot 1{,}7 = 41{,}548$ FE

Aufgabe 21:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x$

1. Berechne die momentane Änderungsrate in $x_0 = -1$ mithilfe der h-Methode.
2. Berechne die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der 1. Ableitung.
3. Berechne die durchschnittliche Änderungsrate in $x \in [0;2]$.

1.

$f(x) = x^2 + 4x$ in $x_0 = -1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$f(-1+h) = (-1+h)^2 + 4 \cdot (-1+h)$$
$$= 1 - 2h + h^2 - 4 + 4h$$
$$= h^2 + 2h - 3$$
$$f(-1) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h - 3 - (-3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = 0 + 2 = 2$$

2.

$$f'(x) = 2x + 4$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$$

3.

$$f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$
$$f(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$m = \frac{12 - 0}{2 - 0} = 6$$

Aufgabe 22:

1.) Bestimme diejenige allgemeine Exponentialfunktion, die durch die Punkte P(0/3) und Q(2/12) geht.
2.) Berechne den Funktionswert für x=1.
3.) Wann wird der Funktionswert 100 angenommen?
4.) Wandel die Funktion in eine e-Funktion um!
5.) Bilde die Ableitung und die Stammfunktion!
6.) Stelle die Tangente in x=1 auf!
7.) Berechne den Flächeninhalt der Funktion in $x \in [0;2]$.

1.) $f(x) = c \cdot a^x \quad P(0|3)$, $\uparrow c = 3$

$f(x) = 3 \cdot a^x \quad |$ Q einsetzen

$12 = 3 \cdot a^2 \quad |:3$

$4 = a^2 \quad |\sqrt{\ }$

$2 = a \quad \longrightarrow \boxed{f(x) = 3 \cdot 2^x}$

2.) $f(1) = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = \boxed{6}$

3.) $100 = 3 \cdot 2^x \quad |:3$

$\frac{100}{3} = 2^x \quad |\log$

$x \approx \boxed{5{,}06}$

4.) $f(x) = 3 \cdot 2^x = \boxed{3 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}}$

5.) $f(x) = 3 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$

$f'(x) = 3 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \approx 2{,}08 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$

$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \approx 4{,}33 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$

6.) Tangente in $x=1$:

$f(1) = 3 \cdot e^{\ln(2) \cdot 1} = 3 \cdot e^{\ln(2)} \rightarrow y = 3e^{\ln(2)}$

$f'(1) = 3 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot 1} = 3 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2)} \rightarrow m = 3 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2)}$

b berechnen:

$3e^{\ln(2)} = 3 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2)} \cdot 1 + b \quad |-3\ln(2)e^{\ln(2)}$

$1{,}8 \approx b$

$t: y = 3 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2)} \cdot x + 1{,}8 \rightarrow \boxed{y = 4{,}16x + 1{,}8}$

7.) $\int_0^2 3 \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \, dx$

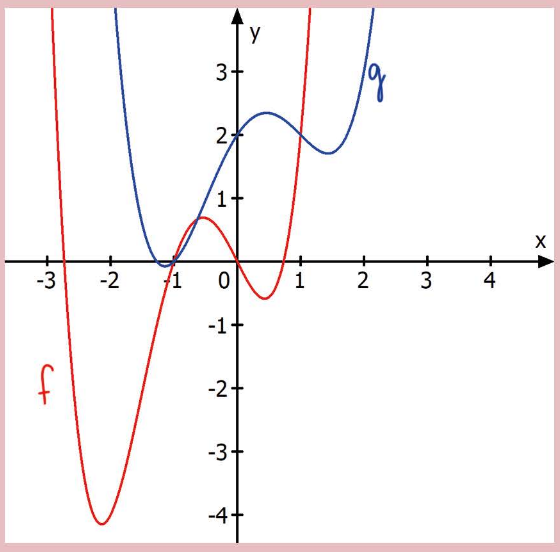
$= \left[\frac{3}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot x} \right]_0^2$

$= \frac{3}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot 2} - \frac{3}{\ln(2)} \cdot e^{\ln(2) \cdot 0}$

$\approx 12{,}98$ FE

Aufgabe 23:

Beschreibe durch welche Veränderungen der Graph von g(x) aus dem Graphen von f(x) hervorgeht und gebe die Parameter a, b, c und d an!



→ gestaucht (y-Richtung) um 0,5 → $a = 0{,}5$
→ Verschoben nach rechts um 1 → $c = -1$
→ Verschoben nach oben um 2 → $d = 2$
$(b = 0)$

$g(x) = 0{,}5 \cdot f(x-1) + 2$

Aufgabe 24:

Gebe diejenige Stammfunktion von $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$ an, die durch $P(-1|15)$ geht!

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 5$

$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 5x + C$ | $P(-1|15)$ einsetzen

$15 = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1) + C$

$15 = \frac{7}{4} + C \quad | -\frac{7}{4}$

$\frac{53}{4} = C$

$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 5x + \frac{53}{4}$

Aufgabe 25:

Bestimme die Stammfunktion von

a) $f(x) = e^{5x+1}$

b) $g(x) = -4 \cdot e^{3x-2}$

a) $f(x) = e^{5x+1} \rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{5x+1}}$

b) $g(x) = -4 \cdot e^{3x-2} \rightarrow \boxed{G(x) = -\frac{4}{3} \cdot e^{3x-2}}$

Aufgabe 26:

Berechne das Integral:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 4)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 4)\,dx &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \left(\tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right) \\ &= \tfrac{8}{3} + 12 + 8 - \left(-\tfrac{1}{3} + 3 - 4\right) \\ &\boxed{= 24}\end{aligned}$$

Aufgabe 27:

Berechne den Flächeninhalt zwischen

$f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = -2x + 1$

1. Grenzen (= Schnittstellen) berechnen: $f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= -2x + 1 \quad | +2x - 1 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \quad | \, pq \\ x_{1/2} &= -\tfrac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \\ &= -1 \pm \sqrt{1+3} \\ &= -1 \pm \sqrt{4} \\ &= -1 \pm 2 \\ x_1 &= -1 + 2 = 1 \\ x_2 &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

2. $f(x) - g(x) = x^2 - 2 - (-2x + 1)$
$= x^2 - 2 + 2x - 1 = x^2 + 2x - 3$

3. Integral: $\int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)\,dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - \left(\tfrac{1}{3} \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3)\right) \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot 1 + 1 - 3 - (-9 + 9 + 9) \\ &= \left|-\tfrac{32}{3}\right| = \boxed{\tfrac{32}{3} \text{ FE}} \end{aligned}$$

Aufgabe 28:

Berechne die gesuchte Grenze b:

$$\int_0^b (-4x+8)\,dx = 6$$

$$\int_0^b (-4x+8)\,dx = 6$$
$$= [-2x^2+8x]_0^b = 6$$
$$= -2b^2+8b-(-2\cdot 0^2+8\cdot 0) = 6$$
$$-2b^2+8b = 6 \quad |-6$$
$$-2b^2+8b-6 = 0 \quad |:(-2)$$

$$b^2-4b+3=0 \quad |pq$$
$$b_{1|2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2-3}$$
$$= 2 \pm \sqrt{1}$$
$$= 2 \pm 1$$

$b_1 = 2+1 = 3$ und $b_2 = 2-1 = 1$

Aufgabe 29:

Berechne den Parameter:

$$\int_0^1 (-6x^2+10ax)\,dx = 14$$

$$\int_0^1 (-6x^2+10ax)\,dx = 14$$
$$= [-2x^3+5ax^2]_0^1 = 14$$
$$-2\cdot 1^3+5a\cdot 1^2-(-2\cdot 0^3+5a\cdot 0^2) = 14$$
$$-2+5a = 14 \quad |+2$$
$$5a = 16 \quad |:5$$
$$a = 3{,}2$$

Aufgabe 30:

Berechne den Mittelwert:

$f(x) = 9x^2-6x+3$ im Bereich $[0;2]$

$$\overline{m} = \frac{1}{2-0}\cdot\int_0^2 (9x^2-6x+3)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot[3x^3-3x^2+3x]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot[3\cdot 2^3-3\cdot 2^2+3\cdot 2-(3\cdot 0^3-3\cdot 0^2+3\cdot 0)]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot[24-12+6-(0)]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot[18] = 9$$