e-Funktionsschar ableiten

Aufgabenstellung

Leite die folgenden Funktionen mit Parameter $a \in \mathbb{R}$ vollständig ab und vereinfache die Ergebnisse

$$\text{(I) } f_1(x) = 3\,e^{\,ax+1} \qquad \text{(II) } f_2(x) = a\,x^2\,e^{\,x} \qquad \text{(III) } f_3(x) = (ax+1)\,e^{\,2x+a}$$

Lösung

(I) $f_1(x) = 3\,e^{\,ax+1}$ $\Rightarrow$ Kettenregel für E-Funktion

Schritt 1: Struktur erkennen
Aufbau Zahl $\cdot\, e^{u(x)}$ mit $u(x) = ax + 1 \Rightarrow$ Kettenregel für E-Funktionen
Schritt 2: Innere Funktion und Ableitung

$$u(x) = ax + 1, \qquad u'(x) = a$$

„Trick" zum Ableiten einer verketteten e-Funktion:
$f(x) = c \cdot e^{u(x)}$
$\longrightarrow f'(x) = c \cdot u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Schritt 3: Ableiten nach der Regel $\left(c\,e^{u(x)}\right)' = c\,u'(x)\,e^{u(x)}$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3 \cdot u'(x) \cdot e^{\,u(x)} \\ &= 3 \cdot a \cdot e^{\,ax+1} \end{aligned}$$

Schritt 4: Ergebnis kompakt

$$\boxed{f_1'(x) = 3a\,e^{\,ax+1}}$$

(II) $f_2(x) = a\,x^2\,e^{\,x}$ $\Rightarrow$ Produktregel

Schritt 1: Struktur erkennen
Produkt zweier Teilfunktionen $u(x) = a\,x^2$ und $v(x) = e^x$
Schritt 2: Teilableitungen bestimmen

Produktregel zum Ableiten
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) +$
$u(x) \cdot v'(x)$

$$u'(x) = 2a\,x \qquad v'(x) = e^x$$

Schritt 3: Produktregel anwenden $(uv)' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \\ &= (2a\,x)\,e^x + (a\,x^2)\,e^x \end{aligned}$$

Schritt 4: Gemeinsamen Faktor ausklammern | e^x **ausklammern**

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= e^x\left(2a\,x + a\,x^2\right) \\ &= e^x\,a\left(x^2 + 2x\right) \end{aligned}$$

Schritt 5: Ergebnis kompakt

$$\boxed{f_2'(x) = a\,e^x\,(x^2 + 2x)}$$

Fallunterscheidung:

- Falls $a > 0$:
$$f_a''(0) = -6a < 0 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = 0$$
$$f_a''(2a) = 6a > 0 \quad \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = 2a$$

- Falls $a < 0$:
$$f_a''(0) = -6a > 0 \quad \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = 0$$
$$f_a''(2a) = 6a < 0 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = 2a$$

- Falls $a = 0$:
$$f_a''(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } x = 0$$

Schritt 4: y-Koordinaten der Extrempunkte Wir setzen die x-Werte in die ursprüngliche Funktion ein.
Für $x = 0$:
$$f_a(0) = 0^3 - 3a \cdot 0^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad EP_1(0/0)$$
Für $x = 2a$:
$$f_a(2a) = (2a)^3 - 3a\,(2a)^2$$
$$= 8a^3 - 3a \cdot 4a^2 = 8a^3 - 12a^3 = -4a^3$$
$$\Rightarrow \quad EP_2(2a/-4a^3)$$

Endergebnis:
Die Funktionenschar $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ besitzt folgende Extrempunkte:
$$EP_1(0/0) \quad \text{und} \quad EP_2(2a/-4a^3)$$
Die Art der Punkte hängt vom Vorzeichen von a ab:

- $a > 0$: Hochpunkt bei $(0/0)$, Tiefpunkt bei $(2a/-4a^3)$
- $a < 0$: Tiefpunkt bei $(0/0)$, Hochpunkt bei $(2a/-4a^3)$
- $a = 0$: Sattelpunkt bei $(0/0)$

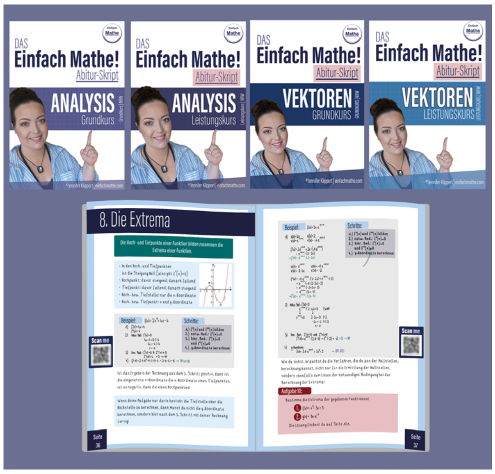
Unsere Skripte

Suchst du noch mehr Erklärungen zu diesem oder einem anderen Thema?
Dann schau dir unbedingt unsere Skripte an – darin findest du:

- Verständliche Erklärungen
- Übungsaufgaben mit Lösungen
- Schrittepläne für jedes Thema
- Exklusive Videos

… und vieles mehr!

https://einfachmathe.com/skripte/



Unsere Kurse

Willst du perfekt vorbereitet ins Mathe-Abi starten?
Dann sind unsere Abi-Kurse genau das Richtige für dich – wähle zwischen Coaching oder Crashkurs:

-Alle wichtigen Abi-Themen verständlich erklärt
-Schritt-für-Schritt-Pläne für jede Aufgabe
- Übungsaufgaben mit Lösungen
- Live-Sessions & Aufzeichnungen
- Individuelle Unterstützung bis zum Abi

https://einfachmathe.com/kurse/

Infos zu einer Nachhilfe bei mir findest du hier
https://einfachmathe.com/nachhilfe-uebersicht/

Hast du Fragen, Anmerkungen oder Wünsche?
Dann schreibe mir gerne eine Mail: Jenny@einfachmathe.com