# LÖSUNGEN

A1

**Aufgabe 1**

Entscheide, ob du für die Bildung der Ableitung zwingend die Produktregel brauchst!

*a)* $f(x) = x^3 + x^2 - 1$
*b)* $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$
*c)* $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$
*d)* $f(x) = (x^2 + 6x) \cdot \sin(x)$
*e)* $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$
*f)* $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$

**Idee:** Die Produktregel ist *zwingend* nötig, wenn $f(x)$ ein echtes Produkt aus *zwei (oder mehr) $x$-abhängigen* Faktoren ist *und* man es nicht sinnvoll zu einem einzigen Term (z. B. einer Potenz) vereinfachen kann. Bei Summen/Differenzen wird *keine* Produktregel benötigt.

**a)** $f(x) = x^3 + x^2 - 1$
**Prüfung:** Summe aus drei Termen, *kein* Produkt aus zwei Funktionen.
**Entscheidung:** $\boxed{\text{Produktregel nein}}$ (termweise ableiten)

**b)** $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$
**Prüfung:** Produkt aus zwei $x$-abhängigen Faktoren: $(x^2 - 2x)$ und $e^x$. Keine sinnvolle Zusammenfassung zu einem einzelnen Term möglich.
**Entscheidung:** $\boxed{\text{Produktregel ja}}$

**c)** $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$
**Schritt 1:** $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
**Schritt 2:** $x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3+\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$
**Schritt 3:** Eine einzige Potenz $\Rightarrow$ Potenzregel ausreichend.
**Entscheidung:** $\boxed{\text{Produktregel nein}}$ (*optional* ginge PR, ist aber *nicht zwingend*)

**d)** $f(x) = (x^2 + 6x) \cdot \sin(x)$
**Prüfung:** Produkt aus zwei $x$-abhängigen Faktoren, keine sinnvolle Vereinfachung zu einem Einzelterm.
**Entscheidung:** $\boxed{\text{Produktregel ja}}$

**e)** $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$
**Prüfung:** Produkt aus zwei trigonometrischen Funktionen, nicht zu einer einzelnen Potenz/ähnlichem vereinfachbar.
**Entscheidung:** $\boxed{\text{Produktregel ja}}$

**f)** $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$
**Prüfung:** Produkt aus zwei $x$-abhängigen Faktoren; $\ln(x)$ lässt sich nicht mit $x^3$ zu einem Einzelterm zusammenfassen.
**Entscheidung:** $\boxed{\text{Produktregel ja}}$

**Kurzüberblick:**

| Aufgabe | Produktregel zwingend? |
|---|---|
| *a)* | nein |
| *b)* | ja |
| *c)* | nein (erst zu $x^{\frac{7}{2}}$ zusammenfassen) |
| *d)* | ja |
| *e)* | ja |
| *f)* | ja |

Video

A2

## Aufgabe 2

Fülle den Lückentext aus!

Die ______________ brauche ich, wenn ich eine Funktion ______________ möchte, die aus mindestens zwei ______________ besteht. Eine solche typische Funktion hat also den Aufbau ______________.
Die Produktregel lautet: ________________________________________

Im ersten Schritt bestimme ich also ____________________. Im zweiten leite ich die Faktoren ab, bilde also ______________________________.

Danach wende ich die Produktregel an und ______________________________ den Ausdruck im letzten Schritt.

Die Produktregel brauche ich, wenn ich eine Funktion ableiten möchte, die aus mindestens zwei Faktoren besteht. Eine solche typische Funktion hat also den Aufbau $u(x) \cdot v(x)$. Die Produktregel lautet: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Im ersten Schritt bestimme ich also $u(x)$ und $v(x)$. Im zweiten leite ich die Faktoren ab, bilde also $u'(x)$ und $v'(x)$.

Danach wende ich die Produktregel an und vereinfache den Ausdruck im letzten Schritt.

Video

A3

## Aufgabe 3

Nenne die 4 Schritte um die Ableitung mithilfe der Produktregel zu bilden:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________
4. ______________________________

Lösung

**1) Faktoren identifizieren**
Bestimme die beiden Faktoren und benenne sie als $u(x)$ und $v(x)$.

**2) Faktoren ableiten**
Leite beide Faktoren getrennt ab: $u'(x)$ und $v'(x)$.

**3) Produktregel anwenden**
Setze in die Formel ein:

$$(u \cdot v)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

**4) Ergebnis vereinfachen**
Fasse den Ausdruck zusammen – ggf. Klammern ausmultiplizieren und Terme sortieren.

A4

**Aufgabe 4**

Leite ab und vereinfache!

*a)* $f(x) = -3x^2 \cdot e^x$

*b)* $f(x) = (x^2 + 6x) \cdot e^x$

*c)* $f(x) = e^x \cdot (2x + 1) + 4$

Lösung

Schritte:

1. u(x) & v(x) bestimmen
2. u′(x) und v′(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

**a)** $f(x) = -3x^2 \cdot e^x$
**Schritt 1:** $u(x) = -3x^2,\ v(x) = e^x$
**Schritt 2:** $u'(x) = -6x,\ v'(x) = e^x$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = (-6x) \cdot e^x + (-3x^2) \cdot e^x$
**Schritt 4:** $f'(x) = e^x \cdot (-6x - 3x^2) = e^x \cdot (-3x^2 - 6x)$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot (-3x^2 - 6x)}$$

**b)** $f(x) = (x^2 + 6x) \cdot e^x$
**Schritt 1:** $u(x) = x^2 + 6x,\ v(x) = e^x$
**Schritt 2:** $u'(x) = 2x + 6,\ v'(x) = e^x$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = (2x + 6) \cdot e^x + (x^2 + 6x) \cdot e^x$
**Schritt 4:** $f'(x) = e^x \cdot \big((2x + 6) + (x^2 + 6x)\big)$
$f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 8x + 6)$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 8x + 6)}$$

**c)** $f(x) = e^x \cdot (2x + 1) + 4$
Zuerst beachten: Es ist eine Summe. Die $+4$ fällt beim Ableiten weg. Es bleibt der Term $e^x \cdot (2x + 1)$.
**Schritt 1:** $u(x) = e^x,\ v(x) = 2x + 1$
**Schritt 2:** $u'(x) = e^x,\ v'(x) = 2$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = e^x \cdot (2x + 1) + e^x \cdot 2$
**Schritt 4:** $f'(x) = e^x \cdot \big(2x + 1 + 2\big) = e^x \cdot (2x + 3)$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot (2x + 3)}$$

A5

## Aufgabe 5

Leite ab ($x \in \mathbb{R}$) und vereinfache so weit wie möglich!

a) $f(x) = 4x \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot \ln(x)$

c) $f(x) = (6x + 1) \cdot \ln(x) + x^2 - 4x$

Video

**Schritte:**

1. u(x) & v(x) bestimmen
2. u'(x) und v'(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

**a)** $f(x) = 4x \cdot \ln(x)$
**Schritt 1:** $u(x) = 4x, \ v(x) = \ln(x)$
**Schritt 2:** $u'(x) = 4, \ v'(x) = \frac{1}{x}$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = 4 \cdot \ln(x) + 4x \cdot \frac{1}{x}$
**Schritt 4:** $f'(x) = 4\ln(x) + 4$

$$\boxed{f'(x) = 4\ln(x) + 4}$$

**b)** $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot \ln(x)$
**Schritt 1:** $u(x) = x^2 - 3x, \ v(x) = \ln(x)$
**Schritt 2:** $u'(x) = 2x - 3, \ v'(x) = \frac{1}{x}$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = (2x - 3) \cdot \ln(x) + (x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{x}$
**Schritt 4:** $f'(x) = (2x - 3)\ln(x) + x - 3$

$$\boxed{f'(x) = (2x - 3)\ln(x) + x - 3}$$

**c)** $f(x) = (6x + 1) \cdot \ln(x) + x^2 - 4x$
Dies ist eine Summe, wir leiten jeden Teil getrennt ab.
**Teil 1:** $(6x + 1) \cdot \ln(x)$
**Schritt 1:** $u(x) = 6x + 1, \ v(x) = \ln(x)$
**Schritt 2:** $u'(x) = 6, \ v'(x) = \frac{1}{x}$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f_1'(x) = 6 \cdot \ln(x) + (6x + 1) \cdot \frac{1}{x}$
**Schritt 4:** $f_1'(x) = 6\ln(x) + 6 + \frac{1}{x}$

**Teil 2:** $x^2 - 4x$
**Ableitung:** $f_2'(x) = 2x - 4$
**Gesamt:**

$$f'(x) = 6\ln(x) + 6 + \frac{1}{x} + 2x - 4$$

$$\boxed{f'(x) = 6\ln(x) + 2x + 2 + \frac{1}{x}}$$

A6

**Aufgabe 6**

Leite ab ($x \in \mathbb{R}$) und vereinfache so weit wie möglich!

$a)\ f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$
$b)\ f(x) = -3x \cdot \cos(x)$
$c)\ f(x) = sin(x) \cdot e^x$

Lösung

**a)** $f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$
**Schritt 1:** $u(x) = x^3,\ v(x) = \sin(x)$
**Schritt 2:** $u'(x) = 3x^2,\ v'(x) = \cos(x)$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$
**Schritt 4:** Keine gemeinsamen Faktoren außer $x^2$. Optional: $f'(x) = x^2 \cdot (3\sin(x) + x\cos(x))$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)}$$

**b)** $f(x) = -3x \cdot \cos(x)$
**Schritt 1:** $u(x) = -3x,\ v(x) = \cos(x)$
**Schritt 2:** $u'(x) = -3,\ v'(x) = -\sin(x)$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = (-3) \cdot \cos(x) + (-3x) \cdot (-\sin(x))$
**Schritt 4:** $f'(x) = -3\cos(x) + 3x\sin(x)$

$$\boxed{f'(x) = -3\cos(x) + 3x\sin(x)}$$

**c)** $f(x) = \sin(x) \cdot e^x$
**Schritt 1:** $u(x) = \sin(x),\ v(x) = e^x$
**Schritt 2:** $u'(x) = \cos(x),\ v'(x) = e^x$
**Schritt 3:** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f'(x) = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x$
**Schritt 4:** $f'(x) = e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x))$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x))}$$

Schritte:

1. u(x) & v(x) bestimmen
2. u'(x) und v'(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

A7

## Aufgabe 7

Bilde die erste Ableitung und vereinfache.

$$a)\ f(x) = (3x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$$
$$b)\ f(x) = -x^2\cdot\sqrt{x}$$
$$c)\ f(x) = x\cdot\sqrt{x}+4x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Lösung

Schritte:

1. u(x) & v(x) bestimmen
2. u'(x) und v'(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

**a)** $f(x) = (3x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$

**Schritt 1:** $u(x)$ **und** $v(x)$ **bestimmen**

$u(x) = 3x+1, \quad v(x) = x^{\frac{2}{3}}$

**Schritt 2:** $u'(x)$ **und** $v'(x)$ **bilden**

$u'(x) = 3, \quad v'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$$f'(x) = 3\cdot x^{\frac{2}{3}} + (3x+1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

**Schritt 4: Vereinfachen**

$$f'(x) = x^{-\frac{1}{3}}\left(3x+\frac{2}{3}(3x+1)\right) = x^{-\frac{1}{3}}\left(5x+\frac{2}{3}\right) = \frac{15x+2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{15x+2}{3\sqrt[3]{x}}}$$

**b)** $f(x) = -x^2\cdot\sqrt{x}$

**Schritt 1:** $u(x)$ **und** $v(x)$ **bestimmen**

$u(x) = -x^2, \quad v(x) = x^{\frac{1}{2}}$

**Schritt 2:** $u'(x)$ **und** $v'(x)$ **bilden**

$u'(x) = -2x, \quad v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$$f'(x) = (-2x)\cdot x^{\frac{1}{2}} + (-x^2)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

**Schritt 4: Vereinfachen**

$$f'(x) = -2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} = -\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = -\frac{5}{2}x\sqrt{x}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{5}{2}x\sqrt{x}}$$

**c)** $\quad f(x) = x \cdot \sqrt{x} + 4x - 1$

**Schritt 1: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen (für den Produktteil)**

$u(x) = x, \quad v(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

**Schritt 2: $u'(x)$ und $v'(x)$ bilden**

$u'(x) = 1, \quad v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

**Schritt 3: Produktregel anwenden für $x \cdot \sqrt{x}$**

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$(x \cdot \sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

**Schritt 4: Restterme ableiten und zusammenfassen**

Ableitung von $+4x$ ist $+4$, Ableitung von $-1$ ist $0$.

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 4$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 4}$$

Schritte:

1. u(x) & v(x) bestimmen
2. u'(x) und v'(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

A8

**Aufgabe 8**

Leite ab und vereinfache falls möglich.

Lösung

$$a)\ f(x) = -2x \cdot (x^2 + 4x) \cdot e^x$$
$$b)\ f(x) = 3 \cdot (x + 4) \cdot e^x$$
$$c)\ f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot e^x$$

Schritte:

1. u(x) & v(x) bestimmen
2. u'(x) und v'(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

**a)** $f(x) = -2x \cdot (x^2 + 4x) \cdot e^x$

**Schritt 1: Struktur erkennen**

Drei Faktoren. Zuerst die Klammer mit $-2x$ ausmultiplizieren:

$$-2x \cdot (x^2 + 4x) = -2x^3 - 8x^2$$

Somit:

$$f(x) = (-2x^3 - 8x^2) \cdot e^x$$

**Schritt 2: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen**

$u(x) = -2x^3 - 8x^2, \quad v(x) = e^x$

**Schritt 3: $u'(x)$ und $v'(x)$ bilden**

$u'(x) = -6x^2 - 16x, \quad v'(x) = e^x$

**Schritt 4: Produktregel anwenden**

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$f'(x) = (-6x^2 - 16x) \cdot e^x + (-2x^3 - 8x^2) \cdot e^x$$

**Schritt 5: Vereinfachen ($e^x$ ausklammern)**

$$f'(x) = e^x \cdot \big((-6x^2 - 16x) + (-2x^3 - 8x^2)\big) = e^x \cdot (-2x^3 - 14x^2 - 16x)$$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot (-2x^3 - 14x^2 - 16x)}$$

**b)** $f(x) = 3 \cdot (x + 4) \cdot e^x$

**Schritt 0: Zahl in Klammer multiplizieren**

$$f(x) = (3x + 12) \cdot e^x$$

**Schritt 1: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen**

$u(x) = 3x + 12, \quad v(x) = e^x$

**Schritt 2: $u'(x)$ und $v'(x)$ bilden**

$u'(x) = 3, \quad v'(x) = e^x$

**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$f'(x) = 3 \cdot e^x + (3x + 12) \cdot e^x$$

**Schritt 4: Vereinfachen ($e^x$ ausklammern)**

$$f'(x) = e^x \cdot \big(3 + (3x + 12)\big) = e^x \cdot (3x + 15)$$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot (3x + 15)}$$

**c)** $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot e^x$

**Schritt 1: Faktoren festlegen (Dreifach-Produktregel)**

$$u(x) = x, \quad v(x) = \sin(x), \quad w(x) = e^x$$

**Schritt 2: Ableitungen bilden**

$$u'(x) = 1, \quad v'(x) = \cos(x), \quad w'(x) = e^x$$

**Schritt 3: Dreifach-Produktregel anwenden**
$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(x) \cdot e^x + x \cdot \cos(x) \cdot e^x + x \cdot \sin(x) \cdot e^x$$

**Schritt 4: Vereinfachen ($e^x$ ausklammern)**

$$f'(x) = e^x \cdot \big(\sin(x) + x\cos(x) + x\sin(x)\big)$$

$$\boxed{f'(x) = e^x \cdot \big(\sin(x) + x\cos(x) + x\sin(x)\big)}$$

Schritte:

1. u(x), v(x) & w(x) best.
2. u'(x), v'(x) & w'(x) bilden
3. In Formel einsetzen
4. vereinfachen

A9

**Aufgabe 9**

Berechne die Steigung des Graphen von $f(x)$ in der gegebenen Stelle $x_0$: $(x \in \mathbb{R})$

$$a)\ f(x) = 8x \cdot e^x, \quad x_0 = 0$$
$$b)\ f(x) = (2x^2 - 3x) \cdot \ln(x), \quad x_0 = 1$$

Lösung

**a)** $f(x) = 8x \cdot e^x,\ x_0 = 0$
**Schritt 1: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen**
$u(x) = 8x, \quad v(x) = e^x$
**Schritt 2: Ableitungen bilden**
$u'(x) = 8, \quad v'(x) = e^x$
**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 8 \cdot e^x + (8x) \cdot e^x$$

**Schritt 4: Vereinfachen**

$$f'(x) = e^x \cdot (8 + 8x)$$

**Schritt 5: An der Stelle $x_0 = 0$ einsetzen**

$$f'(0) = e^0 \cdot (8 + 8 \cdot 0) = 1 \cdot 8 = 8$$

$$\boxed{\text{Die Steigung bei } x_0 = 0 \text{ ist } m = 8}$$

**b)** $f(x) = (2x^2 - 3x) \cdot \ln(x),\ x_0 = 1$
**Schritt 1: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen**
$u(x) = 2x^2 - 3x, \quad v(x) = \ln(x)$
**Schritt 2: Ableitungen bilden**
$u'(x) = 4x - 3, \quad v'(x) = \frac{1}{x}$
**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$f'(x) = (4x - 3) \cdot \ln(x) + (2x^2 - 3x) \cdot \tfrac{1}{x}$$

**Schritt 4: Vereinfachen**
Zweiten Term getrennt betrachten:

$$\frac{2x^2 - 3x}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{3x}{x} = 2x - 3$$

Also:

$$f'(x) = (4x - 3)\ln(x) + (2x - 3)$$

**Schritt 5: An der Stelle $x_0 = 1$ einsetzen**
$\ln(1) = 0$, also verschwindet der erste Term:

$$f'(1) = (4 \cdot 1 - 3) \cdot 0 + (2 \cdot 1 - 3) = 0 + (2 - 3) = -1$$

$$\boxed{\text{Die Steigung bei } x_0 = 1 \text{ ist } m = -1}$$

A10

**Aufgabe 10**

Berechne die Steigung der tangentialen Tangente des Graphen von $f(x)$ in der gegebenen Stelle $x_0$. ($x \in \mathbb{R}$)

$$a)\ f(x) = x \cdot e^x, \quad x_0 = 1$$
$$b)\ f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

Lösung

**a)** $f(x) = x \cdot e^x,\ x_0 = 1$

**Schritt 1: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen**

$u(x) = x, \quad v(x) = e^x$

**Schritt 2: Ableitungen bilden**

$u'(x) = 1, \quad v'(x) = e^x$

**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

**Schritt 4: Vereinfachen**

$$f'(x) = e^x \cdot (1 + x)$$

**Schritt 5: An der Stelle $x_0 = 1$ einsetzen**

$$f'(1) = e^1 \cdot (1 + 1) = e \cdot 2 = 2e$$

$$\boxed{\text{Die Steigung bei } x_0 = 1 \text{ ist } m = 2e}$$

**b)** $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \sin(x),\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

**Schritt 1: $u(x)$ und $v(x)$ bestimmen**

$u(x) = x^2 + 2x, \quad v(x) = \sin(x)$

**Schritt 2: Ableitungen bilden**

$u'(x) = 2x + 2, \quad v'(x) = \cos(x)$

**Schritt 3: Produktregel anwenden**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$f'(x) = (2x + 2) \cdot \sin(x) + (x^2 + 2x) \cdot \cos(x)$$

**Schritt 4: An der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ einsetzen**

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2) \cdot 1 + ((\frac{\pi}{2})^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) \cdot 0$$

**Schritt 5: Vereinfachen**

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\pi + 2) \cdot 1 + 0 = \pi + 2$$

$$\boxed{\text{Die Steigung bei } x_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ist } m = \pi + 2}$$