

60. Abstandsberechnungen

Mit Formeln:

Neben verschiedenen sehr aufwändigen Möglichkeiten, wie zum Beispiel das Lotfußpunktverfahren, gibt es für jede Abstandsberechnung eine recht einfache Formel.

Beispiel: Abstand zweier Punkte

$$d(A; B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(\vec{b}_1 - \vec{a}_1)^2 + (\vec{b}_2 - \vec{a}_2)^2 + (\vec{b}_3 - \vec{a}_3)^2}$$

$$A(a_1, a_2, a_3) ; B(b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{aligned} d(A; B) &= \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{4 + 0 + 4} \\ &= \sqrt{8} \text{ LE} \end{aligned}$$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Gerade

$$A(a_1, a_2, a_3), g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{r}$$

$$A(1|2|0), g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d(A; g) = \frac{|(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r} :$$

	-		-
1	X	1	
-1		X	-1
-1		X	1
1		X	1
-			-

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 1 \\ -1 - 1 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$d(A;g) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \approx 1,6 \text{ LE}$$

Beispiel: Abstand zwischen Punkt und Ebene

Hinweis: Ist die Ebene nicht bereits in Koordinatenform gegeben, dann musst du sie vorab in diese Darstellungsform umwandeln.

$$A(a_1|a_2|a_3); E: n_1x + n_2y + n_3z = d$$

$$d(A;E) = \frac{|n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 - d|}{|\vec{n}|}$$

$$A(1|0|2); E: 2x - 1y + 3z = 4$$

$$d(A;E) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 4|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{2 + 6 - 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\approx 1,07 \text{ LE}$$

Aufgabe:

$$A(2|1|12) ; E: x+y-z=2$$

← siehe Meeting!

Beispiel: Abstand windschiefer Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{r}_1 \quad ; \quad h: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$1) \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}$$

$$2) d(g, h) = \frac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1) \vec{r}_1 \times \vec{r}_2: \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

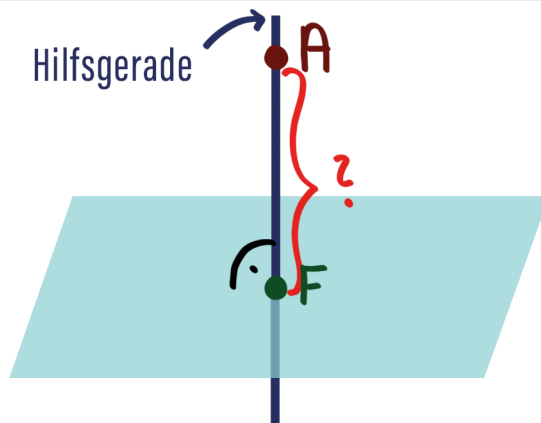
$$2) \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1$$

$$d(g, h) = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58 \text{ LE}$$

Mit Lotfußpunktverfahren:

Beispiel: Abstand Punkt und Ebene



Vorgehen:

1.) Hilfsgerade aufstellen, die senkrecht zur Ebene ist und durch den

Punkt A verläuft: $g: \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{n}$

2.) Schnittpunkt der Hilfsgerade mit der Ebene berechnen

→ Fußpunkt F

3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\vec{AF}|$

$$A(1|2|1), E: x+2y-z=10 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1.) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1+s \\ x_2 &= 2+2s \\ x_3 &= 1-s \end{aligned}$$

$$2.) \quad (1+s) + 2 \cdot (2+2s) - (1-s) = 10$$

$$1+s + 4 + 4s - 1 + s = 10$$

$$6s + 4 = 10 \quad | -4$$

$$6s = 6 \quad | :6$$

$$s = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow F(2|4|0)$$

$$3.) \quad \vec{AF} = \vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |\vec{AF}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ LE}$$

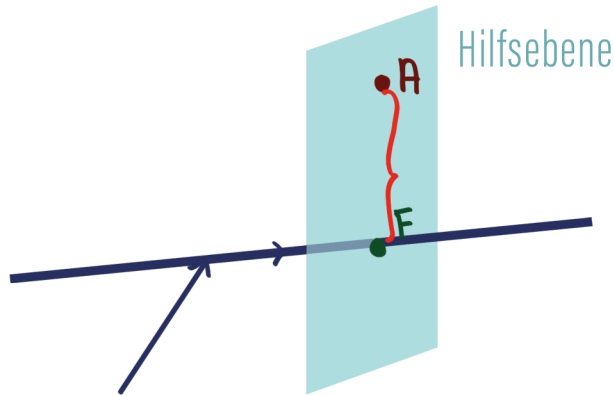
Aufgabe:

$$A(2|1|0), E: x+y-2z=6$$

siehe Meeting!



Beispiel: Abstand Punkt Gerade



Vorgehen:

- 1.) Hilfsebene (Koordinatenform) aufstellen, die A enthält und senkrecht zur Geraden ist! Somit ist der Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene
- 2.) Schnittpunkt der Hilfsebene mit der Geraden berechnen
 → Fußpunkt F
- 3.) Abstand von A zu F berechnen: $|\vec{AF}|$

$$A(2|1|1); g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix} \right)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x = 2+s \\ y = -s \\ z = 1+s \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 1.) \quad & 1x - 1y + 1z = d \\ & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = d \\ & 2 - 1 + 1 = d \rightarrow d = 2 \\ & 1x - 1y + 1z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{Mensurgleichung}$$

$$\rightarrow F \left(\frac{5}{3} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{2}{3} \right)$$

$$3.) \quad \vec{AF} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AF}| &= \sqrt{(-1/3)^2 + (-2/3)^2 + (-1/3)^2} \\ &= \sqrt{1/9 + 4/9 + 1/9} \\ &= \sqrt{6/9} \text{ LE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad & 1 \cdot (2+s) - 1 \cdot (-s) + 1 \cdot (1+s) = 2 \\ & 2+s+s+1+s = 2 \\ & 3s+3 = 2 \quad | -3 \\ & 3s = -1 \quad | :3 \rightarrow s = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe:

$$A(1|2|0), g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

← siehe Meeting!

Aufgabe:

Berechne den Abstand des Punktes zur Geraden (mit Formel und mithilfe des Lotfußpunktverfahrens):

$$A(1|2|1), g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$