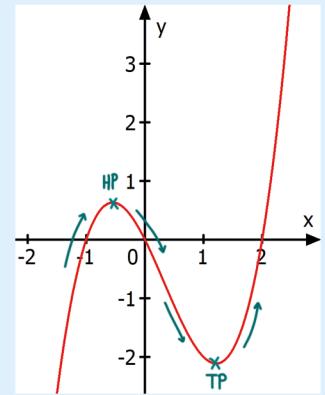


# 7. Die Extrema

Die Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion bilden zusammen die Extrema einer Funktion.

- In den Hoch- und Tiefpunkten ist die Steigung Null (also gilt  $f'(x)=0$ )
- Hochpunkt: davor steigend, danach fallend
- Tiefpunkt: davor fallend, danach steigend
- Hoch- bzw. Tiefstelle: nur die x-Koordinate
- Hoch- bzw. Tiefpunkt: x und y-Koordinate



## Beispiel

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

Schritte:

- 1.)  $f'(x)$  und  $f''(x)$  bilden
- 2.) notw. Bed.:  $f'(x)=0$
- 3.) hinr. Bed.:  $f'(x)=0$  und  $f''(x) \neq 0$
- 4.) y-Koordinate berechnen

Wenn deine Aufgabe nur darin besteht die Tiefstelle oder die Hochstelle zu berechnen, dann musst du nicht die y-Koordinate berechnen, sondern bist nach dem 3. Schritt mit deiner Rechnung fertig!

## Beispiel

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$f'(x) = e^x (x^2 + 2x)$$

$$f''(x) = e^x (x^2 + 4x + 2)$$

Schritte:

- 1.)  $f'(x)$  und  $f''(x)$  bilden
- 2.) notw. Bed.:  $f'(x) = 0$
- 3.) hinr. Bed.:  $f'(x) = 0$   
und  $f''(x) \neq 0$
- 4.) y-Koordinate berechnen

Übung:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$$

## Das Vorzeichen-Wechsel-Kriterium

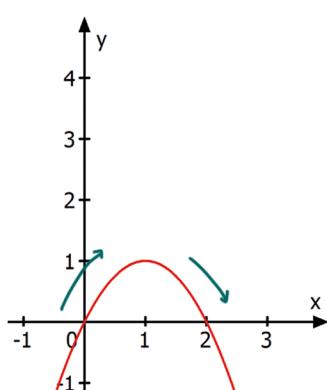
Du kannst die hinreichende Bedingung auch mithilfe des Vorzeichen-Wechsel-Kriteriums bestimmen. Dieses Kriterium beruht darauf, dass du die Steigung vor und nach einer berechneten x-Koordinate, die für ein Extremum in Frage kommt, bestimmst. Es gilt:

Ist die Funktion vor dieser x-Koordinate steigend und danach fallend, dann ist das die x-Koordinate eines Hochpunktes.

Ist die Funktion vor dieser x-Koordinate fallend und danach steigend, dann ist das die x-Koordinate eines Tiefpunktes.

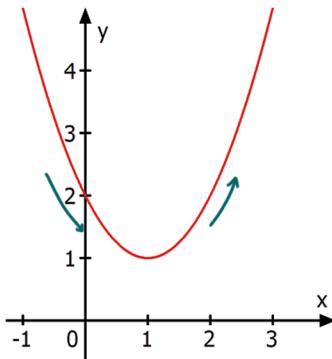
Stellst du fest, dass davor und danach die gleiche Steigung ist, dann ist berechnete x-Koordinate, die eines Sattelpunktes.

### Hochpunkt



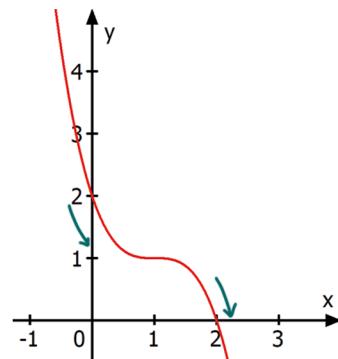
Wechsel von  
steigend nach  
fallend

### Tiefpunkt



Wechsel von  
fallend nach  
steigend

### Sattelpunkt



kein Steigungs-  
wechsel

## Beispiel

$$f(x) = x^2 + 4x + 1$$

Schritte:

- 1.)  $f'(x)$
- 2.) notw. Bed.:  $f'(x)=0$
- 3.) Vorzeichenwechselkrit.
- 4.) y-Koordinate berechnen

## Wann $f''(x)$ und wann VZW-Kriterium

In der Regel bildest du die hinreichende Bedingung mithilfe der zweiten Ableitung. Es gibt allerdings zwei Ausnahmen:

- 1.) Die Bestimmung der zweiten Ableitung ist deutlich aufwendiger als das VZW-Kriterium.
- 2.) Wenn die x-Koordinate, die du in der notwendigen Bedingung berechnet hast, eingesetzt in die zweite Ableitung das Ergebnis Null liefert und du somit nicht eindeutig entscheiden kannst, ob es sich um einen HP, TP oder SP handelt!

## Aufgabe

Bestimme die Extrema der gegebenen Funktionen!

1.  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 1$

2.  $g(x) = 2 \cdot (x^2 - 16) \cdot e^x$