

58. Koordinatenform

Neben der Parameterform und der Normalenform gibt es die sogenannte Koordinatenform:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

Hierbei stehen die Zahlen n_1 , n_2 und n_3 für den Normalenvektor, der senkrecht zur Ebene steht!

Punktprobe:

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene liegt, setzt du diesen in für x_1 , x_2 und x_3 ein und rechnest die linke Seite aus.

Resultiert daraus eine wahre Aussage (linke=rechte Seite), dann liegt der Punkt auf der Ebene, andernfalls nicht!

Beispiel:

$$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

→ $P(1|1|1)$:

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 1$$

$$2 - 2 + 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark \quad \rightarrow P \in E$$

→ $Q(2|1|0)$:

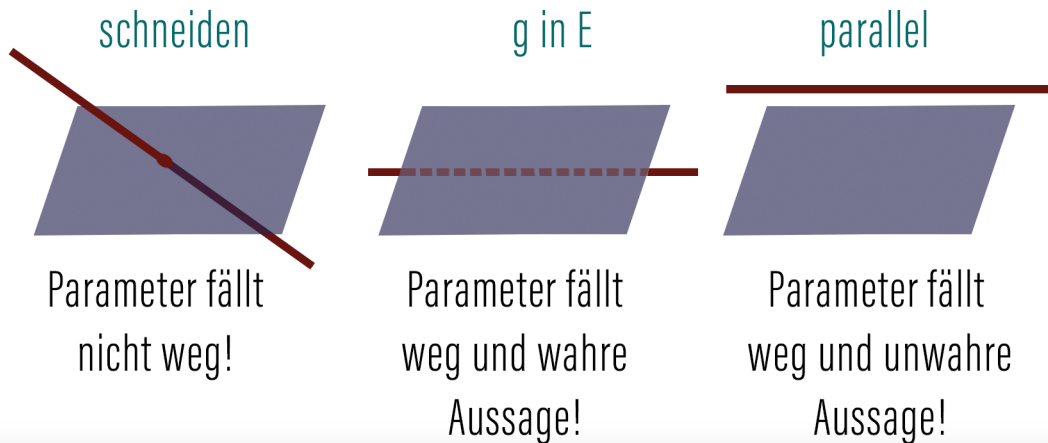
$$2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 0 = 1$$

$$4 - 2 + 0 = 1$$

$$2 = 1 \quad \nabla \rightarrow Q \notin E$$

Lagebeziehung zu einer Geraden

Um zu überprüfen wie eine Gerade und eine Ebene in Koordinatenform zueinander liegen, setzt du die Gerade für x_1 , x_2 und x_3 in die Ebene ein und vereinfachst diesen Ausdruck!



Beispiel: Gerade und Ebene schneiden sich

$$E: -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 + 2s \\ x_2 = 2 - s \\ x_3 = 3s \end{array}$$

$$\text{einsetzen: } -(1 + 2s) + 2 \cdot (2 - s) + 3s = 5$$

$$-1 - 2s + 4 - 2s + 3s = 5$$

$$3 - 1s = 5 \quad | -3$$

$$-1s = 2 \quad | :(-1) \rightarrow s = -2 \rightarrow g \cap E$$

$$\text{sin } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{SP}(-3/4/-6)$$

Beispiel: Gerade liegt in der Ebene

$$E: -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 + 2s \\ x_2 = 2 - s \\ x_3 = 4s \end{matrix}$$

einsetzen: $-(1+2s) + 2 \cdot (2-s) + 4s = 3$
 $-1 - 2s + 4 - 2s + 4s = 3$
 $3 = 3$
 $\rightarrow g \text{ in } E$

Beispiel: Gerade und Ebene sind parallel

$$E: -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 + 2s \\ x_2 = 1 - s \\ x_3 = -1 + 4s \end{matrix}$$

einsetzen: $-(1+2s) + 2 \cdot (1-s) + (-1) + 4s = 6$
 $-1 - 2s + 2 - 2s - 1 + 4s = 6$
 $0 = 6 \quad \downarrow$
 $g \parallel E$

Aufgabe:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ Lagebez.}$$

← siehe Meeting!

Aufgabe:

Prüfe wie die Gerade und die Ebene zueinander liegen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$$