

Lernzettel: Symmetrie rechnerisch prüfen

Merkkasten

Achsensymmetrie zur y-Achse:

Eine Funktion f ist *achsensymmetrisch*, wenn gilt

$$f(-x) = f(x)$$

(gerade Funktion).

Punktsymmetrie zum Ursprung:

Eine Funktion f ist *punktsymmetrisch*, wenn gilt

$$f(-x) = -f(x)$$

(ungerade Funktion).

Schnelltests (vor allem bei Polynomen):

- Nur gerade Exponenten $\Rightarrow$ oft achsensymmetrisch.
- Nur ungerade Exponenten und $f(0) = 0 \Rightarrow$ oft punktsymmetrisch.

Graphisch: Spiegelung an der y-Achse vs. Drehung um 180° um den Ursprung.

Schritte: Achsensymmetrie zur y-Achse

1. **Zu prüfen:** $f(-x) = f(x)$
2. $f(x)$ gegeben notieren
3. $f(-x)$ bilden und vereinfachen
4. **Deuten:** Ist $f(-x) = f(x)$ erfüllt?

Schritte: Punktsymmetrie zum Ursprung

1. **Zu prüfen:** $f(-x) = -f(x)$
2. $f(-x)$ bilden und vereinfachen
3. $-f(x)$ bilden und vereinfachen
4. **Deuten:** Ist $f(-x) = -f(x)$ erfüllt?

Symmetrie-Typen im Überblick (mit Beispielen)

- **Achsensymmetrisch zur y-Achse** ($f(-x) = f(x)$):
 - x^2 , $x^4 - 2x^2 + 3$ (siehe Beispiel 1)
 - $|x|$ (siehe Beispiel 4)
 - $\cos x$
- **Punktsymmetrisch zum Ursprung** ($f(-x) = -f(x)$):
 - x , x^3 , $x^3 - 5x$ (siehe Beispiel 2)
 - $x \cdot e^{x^2}$ (siehe Beispiel 6)
 - $\sin x$
- **Weder noch:**
 - $x^3 + x^2$ (siehe Beispiel 3)
 - e^x (siehe Beispiel 5)

Beispiel 1

Polynom mit nur geraden Exponenten (erwartet: Achsensymmetrie).

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Schritt 1: Zu prüfen

$$f(-x) \stackrel{?}{=} f(x)$$

Schritt 2: $f(x)$ gegeben

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

Schritt 3: $f(-x)$ bilden und vereinfachen

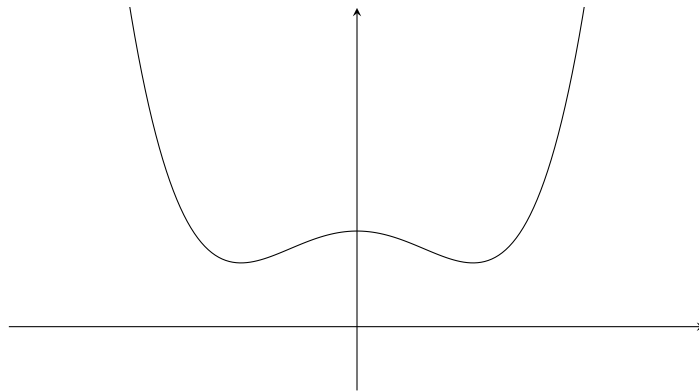
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 \\ &= x^4 - 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$f(-x) = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x)$$

achsensymmetrisch zur y-Achse

Graph zu Beispiel 1



Man erkennt: Der linke Ast ist Spiegelung des rechten an der y-Achse.

Beispiel 2

Polynom mit nur ungeraden Exponenten (erwartet: Punktsymmetrie).

$$g(x) = x^3 - 5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Schritt 1: Zu prüfen

$$g(-x) \stackrel{?}{=} -g(x)$$

Schritt 2: $g(-x)$ bilden und vereinfachen

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 - 5(-x) \\ &= -x^3 + 5x \end{aligned}$$

Schritt 3: $-g(x)$ bilden und vereinfachen

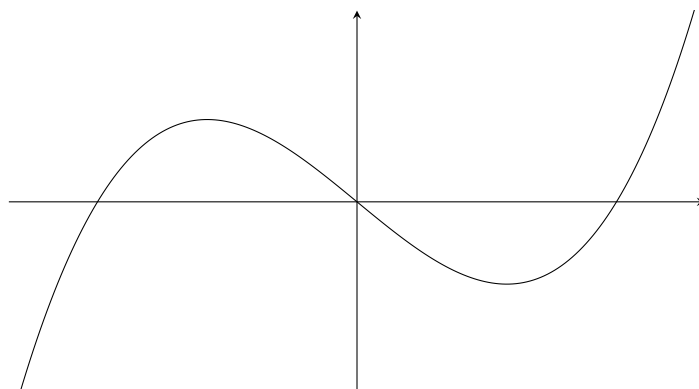
$$\begin{aligned} -g(x) &= -(x^3 - 5x) \\ &= -x^3 + 5x \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$g(-x) = -x^3 + 5x = -g(x)$$

punktsymmetrisch zum Ursprung

Graph zu Beispiel 2



Man erkennt: Der Graph lässt sich durch eine Drehung um 180° um den Ursprung auf sich selbst abbilden.

Beispiel 3

Polynom mit geraden *und* ungeraden Exponenten (erwartet: weder noch).

$$h(x) = x^3 + x^2 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Achsensymmetrie zur y-Achse

Schritt 1: Zu prüfen

$$h(-x) \stackrel{?}{=} h(x)$$

Schritt 2: $h(x)$ gegeben

$$h(x) = x^3 + x^2$$

Schritt 3: $h(-x)$ bilden und vereinfachen

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 \\ &= -x^3 + x^2 \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$h(-x) = -x^3 + x^2 \neq x^3 + x^2 = h(x)$$

$\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie.

Punktsymmetrie zum Ursprung

Schritt 1: Zu prüfen

$$h(-x) \stackrel{?}{=} -h(x)$$

Schritt 2: $h(-x)$ (von oben) übernehmen

$$h(-x) = -x^3 + x^2$$

Schritt 3: $-h(x)$ bilden und vereinfachen

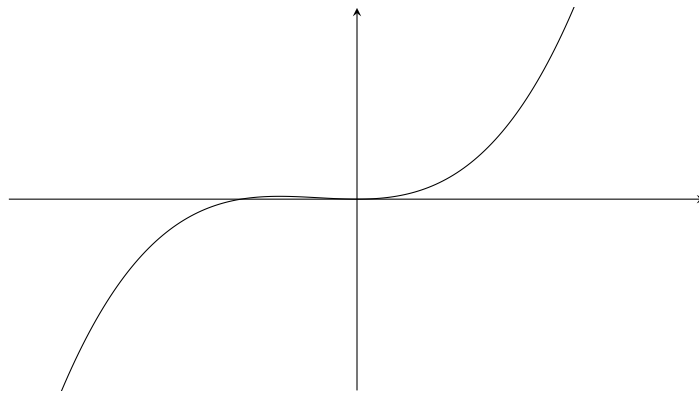
$$\begin{aligned} -h(x) &= -(x^3 + x^2) \\ &= -x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$h(-x) = -x^3 + x^2 \neq -x^3 - x^2 = -h(x)$$

weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch

Graph zu Beispiel 3



Weder Spiegelung an der y -Achse noch Drehung um den Ursprung lässt den Graphen auf sich selbst fallen.

Beispiel 4

Betragsfunktion (typisches Beispiel für Achsensymmetrie).

$$p(x) = |x| \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Schritt 1: Zu prüfen

$$p(-x) \stackrel{?}{=} p(x)$$

Schritt 2: $p(x)$ gegeben

$$p(x) = |x|$$

Schritt 3: $p(-x)$ bilden und vereinfachen

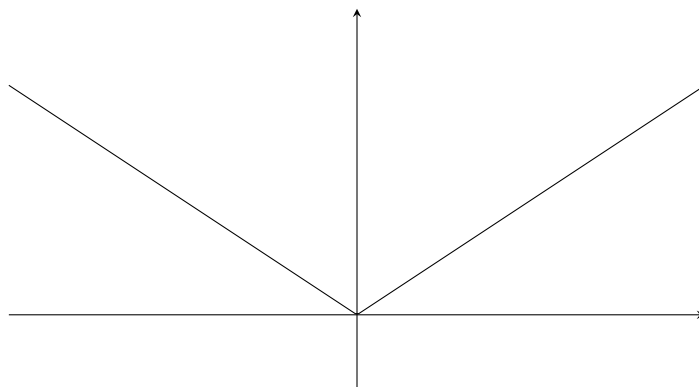
$$\begin{aligned} p(-x) &= |-x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$p(-x) = |x| = p(x)$$

achsensymmetrisch zur y -Achse

Graph zu Beispiel 4



Typisches „V“: linker und rechter Ast sind Spiegelbilder an der y -Achse.

Beispiel 5

Einfache e-Funktion (erwartet: weder noch).

$$k(x) = e^x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Achsensymmetrie zur y-Achse

Schritt 1: Zu prüfen

$$k(-x) \stackrel{?}{=} k(x)$$

Schritt 2: $k(x)$ gegeben

$$k(x) = e^x$$

Schritt 3: $k(-x)$ bilden und vereinfachen

$$k(-x) = e^{-x}$$

Schritt 4: Deuten

$$e^{-x} \neq e^x \quad (\text{nur bei } x = 0 \text{ gleich})$$

$\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie.

Punktsymmetrie zum Ursprung

Schritt 1: Zu prüfen

$$k(-x) \stackrel{?}{=} -k(x)$$

Schritt 2: $k(-x)$ (von oben) übernehmen

$$k(-x) = e^{-x}$$

Schritt 3: $-k(x)$ bilden und vereinfachen

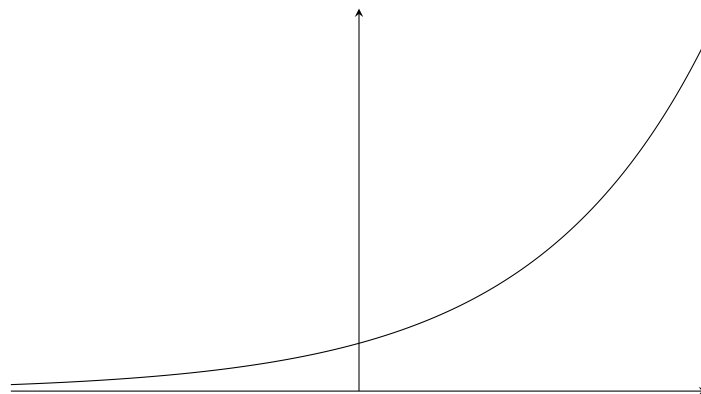
$$-k(x) = -e^x$$

Schritt 4: Deuten

$$e^{-x} \neq -e^x$$

weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch

Graph zu Beispiel 5



Links und rechts der y-Achse sehen völlig anders aus, und eine Drehung um den Ursprung passt auch nicht.

Beispiel 6

Kompliziertere e-Funktion mit Produkt.

$$s(x) = x \cdot e^{x^2} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Achsensymmetrie zur y-Achse

Schritt 1: Zu prüfen

$$s(-x) \stackrel{?}{=} s(x)$$

Schritt 2: $s(x)$ gegeben

$$s(x) = x \cdot e^{x^2}$$

Schritt 3: $s(-x)$ bilden und vereinfachen

$$\begin{aligned} s(-x) &= (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -x \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$s(-x) = -x \cdot e^{x^2} \neq x \cdot e^{x^2} = s(x)$$

$\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie.

Punktsymmetrie zum Ursprung

Schritt 1: Zu prüfen

$$s(-x) \stackrel{?}{=} -s(x)$$

Schritt 2: $s(-x)$ (von oben) übernehmen

$$s(-x) = -x \cdot e^{x^2}$$

Schritt 3: $-s(x)$ bilden und vereinfachen

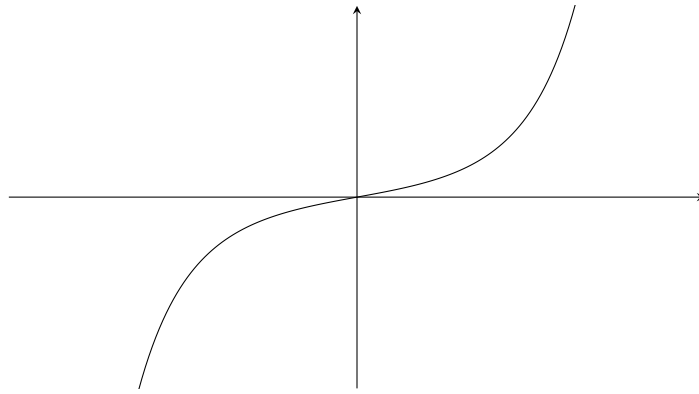
$$\begin{aligned} -s(x) &= -(x \cdot e^{x^2}) \\ &= -x \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

Schritt 4: Deuten

$$s(-x) = -x \cdot e^{x^2} = -s(x)$$

punktsymmetrisch zum Ursprung

Graph zu Beispiel 6



Typisch ungerader Graph: Der rechte Ast ist die 180°-Drehung des linken um den Ursprung.

Stolperfallen & Tipps

- Gerade Potenzen bleiben gleich, ungerade wechseln das Vorzeichen.
- Konstante Terme verhindern Punktsymmetrie, aber nicht Achsensymmetrie.
- Mischung aus geraden und ungeraden Termen $\Rightarrow$ meist keine Symmetrie.
- Typische Beispiele:
 - $\cos x$ ist gerade ($\cos(-x) = \cos x$).
 - $\sin x$ ist ungerade ($\sin(-x) = -\sin x$).
 - e^x ist weder noch (siehe Beispiel 5).
 - $x \cdot e^{x^2}$ ist ungerade (siehe Beispiel 6).
- **Prüfreihefolge in der Klausur:**
 1. Grober Blick: Exponenten / Beträge / $\sin, \cos, e^x$ erkennen.
 2. $\Rightarrow$ Vermutung: achsensymmetrisch / punktsymmetrisch / weder noch.
 3. $\Rightarrow$ Rechnen:
 - Achsensymmetrie: $f(-x)$ mit $f(-x) = f(x)$ prüfen.
 - Punktsymmetrie: $f(-x)$ und $-f(x)$ mit $f(-x) = -f(x)$ prüfen.
 4. Ergebnis in einem Satz deuten („achsensymmetrisch“, „punktsymmetrisch“ oder „weder noch“).