

Lernzettel: Ableiten mit negativer Potenzschreibweise

Wenn im Term ein **Bruch mit x im Nenner** steht (z. B. $\frac{1}{x^3}$), ist das Ableiten oft einfacher, wenn du ihn zuerst als **Potenz mit negativem Exponenten** schreibst. Danach kannst du ganz normal die Potenzregel anwenden und am Ende wieder zurück in die Bruchschreibweise gehen.

Wichtig: Weil x im Nenner steht, darf x nicht 0 sein

Umformungsregel (Nenner $\rightarrow$ negativer Exponent):

$$\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$$

Zurück umformen (negativer Exponent $\rightarrow$ Bruch):

$$x^{-b} = \frac{1}{x^b} \quad \Rightarrow \quad a \cdot x^{-b} = \frac{a}{x^b}$$

Potenzregel (auch für negative Exponenten):

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Merke: Der Exponent wird beim Ableiten um 1 kleiner

Die 3 Schritte

1. **Umformen:** Bruch $\frac{a}{x^b}$ in $a \cdot x^{-b}$ umschreiben
2. **Ableiten:** Potenzregel anwenden: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3. **Zurück umformen:** Negative Potenz wieder als Bruch schreiben

Aufgabenstellung

Leite ab (und wandle anschließend wieder in einen Bruch um).

Gegeben sind Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$(2) g(x) = \frac{3}{x^4}$$

$$(3) h(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Lösungen (mit Zwischenschritten)

(1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Schritt 1: Umformen in Potenzschreibweise

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = 1 \cdot x^{-3}$$

Schritt 2: Ableitung bilden (Potenzregel)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} \\&= -3x^{-4}\end{aligned}$$

Schritt 3: Zurück umformen in Bruchschreibweise

$$-3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3}{x^4}}$$

(2) $g(x) = \frac{3}{x^4}$

Schritt 1: Umformen in Potenzschreibweise

$$g(x) = \frac{3}{x^4} = 3 \cdot x^{-4}$$

Schritt 2: Ableitung bilden (Potenzregel)

$$\begin{aligned}g'(x) &= 3 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} \\&= -12x^{-5}\end{aligned}$$

Schritt 3: Zurück umformen in Bruchschreibweise

$$-12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{12}{x^5}}$$

(3) $h(x) = -\frac{2}{x^2}$

Schritt 1: Umformen in Potenzschreibweise

$$h(x) = -\frac{2}{x^2} = -2 \cdot x^{-2}$$

Schritt 2: Ableitung bilden (Potenzregel)

$$\begin{aligned}h'(x) &= -2 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} \\&= 4x^{-3}\end{aligned}$$

Schritt 3: Zurück umformen in Bruchschreibweise

$$4x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{4}{x^3}}$$

Tipps & typische Stolperfallen

- **Definitionsbereich:** $x \neq 0$, weil x im Nenner steht
- **Nicht direkt am Bruch ableiten:** Erst umformen ($\frac{a}{x^b} = a \cdot x^{-b}$)
- **Exponent um 1 kleiner:** Bei x^n wird daraus x^{n-1} , z. B. $x^{-3} \rightarrow x^{-4}$
- **Minuszeichen beachten:** $-2 \cdot (-2) = +4$
- **Am Ende zurück in den Bruch:** $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$

Kontroll-Check (Plausibilität):

Wenn die Funktion ein **Bruch mit x im Nenner** ist, dann ist die Ableitung meistens auch wieder ein Bruch mit x im Nenner.

Außerdem: Bei $\frac{1}{x^3}$ ist das Ergebnis **negativ**, weil beim Ableiten der Faktor -3 entsteht

Zusatzbeispiele

Beispiel 1: Summe mit Bruchterm

Gegeben ist $f(x) = 2 + \frac{1}{x^3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$

Schritt 1: Umformen in Potenzschreibweise

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + \frac{1}{x^3} \\ &= 2 + x^{-3} \end{aligned}$$

Schritt 2: Ableitung bilden (Potenzregel)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + (-3) \cdot x^{-4} \\ &= -3x^{-4} \end{aligned}$$

Schritt 3: Zurück umformen in Bruchschreibweise

$$-3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4}$$

Beispiel 2: Polynom + Bruchterm

Gegeben ist $g(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{x^4}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$

Schritt 1: Umformen in Potenzschreibweise

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2x + \frac{3}{x^4} \\ &= x^2 + 2x + 3x^{-4} \end{aligned}$$

Schritt 2: Ableitung bilden (Potenzregel)

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + 3 \cdot (-4) \cdot x^{-5} \\ &= 2x + 2 - 12x^{-5} \end{aligned}$$

Schritt 3: Zurück umformen in Bruchschreibweise

$$2x + 2 - 12x^{-5} = 2x + 2 - \frac{12}{x^5}$$

$$g'(x) = 2x + 2 - \frac{12}{x^5}$$