Lernzettel: Drei Integraltypen

Es gibt drei wichtige Integraltypen, die du unterscheiden solltest: **unbestimmtes Integral**, **bestimmtes Integral** und **uneigentliches Integral**. Sie sehen ähnlich aus, bedeuten aber etwas Unterschiedliches.

Überblick:

- **Unbestimmtes Integral** $\displaystyle\int f(x)\,dx$: Ergebnis ist eine **Stammfunktion** $F(x)$ mit $+C$.
- **Bestimmtes Integral** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$: Ergebnis ist eine **Zahl** (Flächenbilanz) durch $F(b) - F(a)$.
- **Uneigentliches Integral**: Mindestens eine Grenze ist $\pm\infty$ oder der Integrand ist an einer Stelle nicht definiert. Das Ergebnis wird über einen **Grenzwert** (Limes) bestimmt.

---

1. Unbestimmtes Integral $\displaystyle\int f(x)\,dx$

Definition: Eine Stammfunktion F von f erfüllt $F'(x) = f(x)$. Dann gilt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Potenzregel (Stammfunktion), $n \neq -1$**:**

$$f(x) = c \cdot x^n \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{c}{n+1}x^{n+1}$$

Spezialfälle:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \;(a \neq 0)$$

Schritte (Rezept):

1. Ausdruck als Summe/Differenz erkennen
2. Termweise integrieren (Konstanten als Faktoren vorziehen)
3. Passende Regel anwenden (Potenzregel, $\frac{1}{x}$, e^{ax})
4. $\boxed{+C}$ anhängen und ggf. durch Ableiten kontrollieren

Stolperfallen & Tipps:

- $+\mathbf{C}$ nie vergessen
- Bei $\int \frac{1}{x}\,dx$ immer $\ln|x|$ (mit Betrag)
- Bei $\int e^{ax}\,dx$ den Faktor $\frac{1}{a}$ nicht übersehen
- Konstante k als Summand wird zu kx

Beispiel 1 – Polynom

Berechne $\int \left(2x^2 - 3x + 4\right) dx$.
Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int (2x^2 - 3x + 4)\,dx &= \int (2x^2 - 3x^1 + 4)\,dx && \text{Exponenten markieren}\\
&= \frac{2}{2+1}x^{2+1} - \frac{3}{1+1}x^{1+1} + 4x + C && \text{Potenzregel anwenden}\\
&= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C\\
&= \boxed{\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C}
\end{aligned}$$

Beispiel 2 – Mix mit e^x

Berechne $\int \left(3e^x - x^2 + 1\right) dx$.
Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int (3e^x - x^2 + 1)\,dx &= \int (3e^x - x^2 + 1)\,dx && \text{Exponenten sind schon sichtbar}\\
&= 3e^x - \frac{1}{2+1}x^{2+1} + 1 \cdot x + C && \text{Regeln anwenden}\\
&= 3e^x - \frac{1}{3}x^3 + x + C\\
&= \boxed{3e^x - \frac{1}{3}x^3 + x + C}
\end{aligned}$$

Beispiel 3 – $\frac{1}{x}$ und e^{2x}

Berechne $\int \left(\frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx$.
Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx &= \int \left(x^{-1} + e^{2x}\right) dx && \frac{1}{x} \text{ als Potenz schreiben}\\
&= \int x^{-1}\,dx + \int e^{2x}\,dx && \text{aufteilen}\\
&= \ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} + C && \text{Regeln anwenden}\\
&= \boxed{\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} + C}
\end{aligned}$$

Hinweis:
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ – das ist ein *Sonderfall*, weil der Exponent -1 ist.
Für Exponentialfunktionen mit linearer Verkettung $c \cdot e^{mx+b}$ gilt allgemein:

$$\int c \cdot e^{mx+b}\,dx = c \cdot \frac{1}{m} e^{mx+b} + C$$

Im Beispiel ist c nicht vorhanden und $m = 2$, also:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

---

2. Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$ ($F'(x) = f(x)$), dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Potenzregel (Stammfunktion), $n \neq -1$:

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Sonderfall: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

Schritte (Rezept):

1. **Stammfunktion bilden** $F(x)$ (ohne $+C$)
2. **Wenn nötig vereinfachen** $F(x)$
3. **„obere Grenze“ – „untere Grenze“**: $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$
4. **Ausrechnen und ggf. deuten**

Stolperfallen & Tipps:

- $\int f(x)\,dx$: das dx nicht vergessen
- Reihenfolge der Grenzen: $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Flächenbilanz $\neq$ Flächeninhalt (für Flächeninhalt ggf. $|f|$ stückweise integrieren)
- Einheit: y-Einheit $\cdot$ x-Einheit (z. B. LE^2)

Beispiel 1 – Lineare Funktion

Berechne $\int_0^3 (2x-1)\,dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (2x-1)\,dx &= \int_0^3 (2x^1-1)\,dx && \text{Exponenten markieren}\\
&= \left(\frac{2}{1+1}x^{1+1} - 1\cdot x\right)\Big|_0^3 && \text{Stammfunktion bilden}\\
&= \left(x^2-x\right)\Big|_0^3\\
&= \left(3^2-3\right) - \left(0^2-0\right) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“}\\
&= 9-3-0\\
&= 6\\
&= \boxed{6}
\end{aligned}$$

Beispiel 2 – Quadratische Funktion

Berechne $\int_1^4 \left(x^2-3x+2\right)\,dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x^2-3x+2)\,dx &= \int_1^4 (x^2-3x^1+2)\,dx && \text{Exponenten markieren}\\
&= \left(\frac{1}{2+1}x^{2+1} - \frac{3}{1+1}x^{1+1} + 2x\right)\Big|_1^4 && \text{Stammfunktion bilden}\\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^4\\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4\right)\\
&\quad - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right) && \text{„obere“ – „untere“ Grenze}\\
&= \left(\frac{64}{3} - 24 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right)\\
&= \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \frac{5}{6}\\
&= \frac{16}{3} - \frac{5}{6}\\
&= \frac{32-5}{6}\\
&= \frac{27}{6}\\
&= \frac{9}{2}\\
&= \boxed{\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

Beispiel 3 – Exponentialfunktion mit linearer Verkettung

Berechne $\int_0^1 2e^{-x+1}\,dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2e^{-x+1}\,dx &= \int_0^1 2e^{(-1)\cdot x+1}\,dx && \text{Exponenten als } -1\cdot x+1\\
&= 2\cdot\frac{1}{-1}e^{(-1)\cdot x+1}\Big|_0^1 && \text{Regel } \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}\\
&= -2e^{-x+1}\Big|_0^1\\
&= \left(-2e^{-1+1}\right) - \left(-2e^{0+1}\right) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“}\\
&= \left(-2e^{0}\right) - \left(-2e^{1}\right)\\
&= -2\cdot 1 + 2e\\
&= 2e-2\\
&= \boxed{2e-2}
\end{aligned}$$

---

3. Uneigentliches Integral

Wann uneigentlich?

- Mindestens eine Grenze ist $\pm\infty$, z. B. $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$
- oder der Integrand ist an einer Grenze (oder im Inneren) nicht definiert (z. B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, Problem bei $x=0$).

Idee: Statt direkt zu integrieren, wird ein **Grenzwert** betrachtet, z. B.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Nur wenn der Grenzwert endlich ist, *konvergiert* das Integral, sonst *divergiert* es.

Schritte (Rezept):

1. **Stammfunktion bilden** $F(x)$ von $f(x)$ (ohne $+C$)
2. **Limes einfügen**, z. B. $\displaystyle\int_1^\infty = \lim_{b\to\infty}\int_1^b$
3. **„obere Grenze“ – „untere Grenze“** innerhalb des Limes: $F(x)\big|_{\text{unten}}^{\text{oben}}$
4. **Wenn möglich: Limes berechnen** $\Rightarrow$ Wert oder Divergenz entscheiden

Stolperfallen & Tipps:

- Immer zuerst klären, *wo* das Problem liegt (∞-Grenze oder Polstelle)
- Ohne Limes ist $\displaystyle\int_1^\infty \ldots\,dx$ nur eine Kurzschreibweise
- Typisch: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergiert für $p>1$, divergiert für $p\le 1$
- Bei Problemstellen im Inneren (z. B. bei $x=0$ zwischen -1 und 1) die Integrale *aufteilen*

Beispiel 1 – Unendliche obere Grenze (kleinschrittig, konvergent)

Berechne $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.
Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \int_1^\infty x^{-2}\,dx && \text{als Potenz schreiben}\\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx && \text{Limes einführen}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{-2+1} x^{-2+1}\Big|_1^b \right) && \text{Potenzregel}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{-1} x^{-1}\Big|_1^b \right)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b \right)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) \right) && \text{„obere" – „untere" Grenze}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right)\\
&= 0 + 1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\boxed{1 \text{ (Integral konvergiert)}}$

Beispiel 2 – Uneigentliches Integral mit e-Funktion

Berechne $\int_2^\infty 2e^{-3x+6}\,dx$.
Rechnung:

$$
\begin{aligned}
\int_2^\infty 2e^{-3x+6}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b 2e^{-3x+6}\,dx && \text{Limes einführen}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{-3} e^{-3x+6}\Big|_2^b \right) && \text{Regel } \int e^{mx+b}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx+b}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{2}{3} e^{-3x+6}\Big|_2^b \right)\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{2}{3} e^{-3b+6} - \left(-\frac{2}{3} e^{-3\cdot 2+6}\right) \right) && \text{„obere Grenze" – „untere Grenze"}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{2}{3} e^{-3b+6} + \frac{2}{3} e^{0} \right)\\
&= 0 + \frac{2}{3} \cdot 1\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\int_2^\infty 2e^{-3x+6}\,dx = \frac{2}{3} \text{ (Integral konvergiert)}}$

Beispiel 3 – Unendliche obere Grenze (divergent)

Berechne $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx && \text{Limes einführen}\\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) && \text{Sonderfall } \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“}\\
&= \lim_{b\to\infty} \ln b\\
&= \infty
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Integral divergiert (kein endlicher Wert)}}$

Beispiel 4 – Unendliche untere Grenze (konvergent)

Berechne $\int_{-\infty}^{1} 4e^{x-1}\,dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{1} 4e^{x-1}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 4e^{x-1}\,dx && \text{Limes einführen}\\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(4 \cdot \frac{1}{1} \cdot e^{x-1} \Big|_a^1 \right) && \text{Regel } \int e^{x-1}\,dx = e^{x-1} + C\\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(4 \cdot e^{x-1} \Big|_a^1 \right)\\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(4e^{1-1} - 4e^{a-1} \right) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“}\\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(4 \cdot e^{0} - 4e^{a-1} \right)\\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(4 - 4e^{a-1} \right)\\
&= 4 - 4 \cdot 0\\
&= 4
\end{aligned}$$

$\boxed{4 \text{ (Integral konvergiert)}}$