

Lernzettel: Sekantensteigung (mittlere Änderungsrate)

Die **Sekantensteigung** beschreibt, wie stark eine Funktion zwischen zwei Stellen x_1 und x_2 im Durchschnitt steigt oder fällt.

Dazu braucht man zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf dem Graphen.

Steigungsformel:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Wenn die Punkte auf einer Funktion f liegen ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$), dann gilt auch:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Deutung der Sekantensteigung:

$$m > 0 \Rightarrow \text{Graph steigt}, \quad m < 0 \Rightarrow \text{Graph fällt}, \quad m = 0 \Rightarrow \text{waagerecht}$$

Einheit: Wenn x z. B. in Sekunden und y in Metern gemessen wird, dann hat m die Einheit m/s

Die 3 Schritte

1. x_1 und x_2 **festlegen:** aus Punkten ablesen oder aus einem Intervall $[x_1; x_2]$ entnehmen
2. y_1 und y_2 **bestimmen:** aus Punkten ablesen oder über $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ berechnen
3. **Steigung berechnen:** $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Beispiel 1: Steigung aus zwei gegebenen Punkten

Formel (immer zuerst)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aufgabe: Gegeben sind die Punkte $P(1|3)$ und $Q(4|9)$.
Berechne die Steigung m der Geraden durch P und Q .

Schritt 1: Aus den Punkten x_1, x_2, y_1, y_2 ablesen

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = 3$$

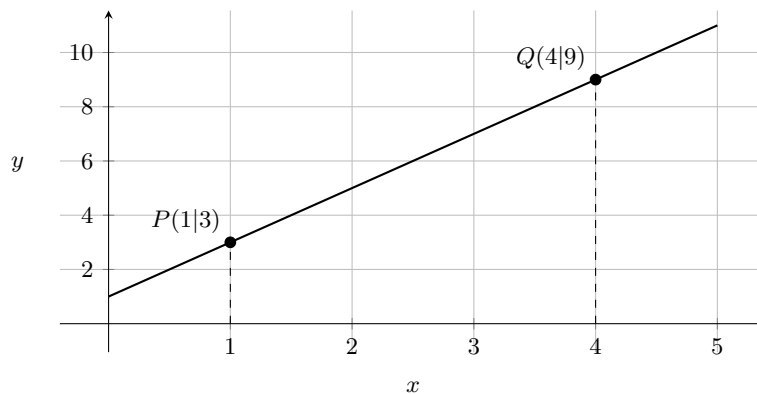
$$x_2 = 4$$

$$y_2 = 9$$

Schritt 2: In die Steigungsformel einsetzen

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{9 - 3}{4 - 1} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Skizze (Punkte + Sekante)



Schritt 3: Deutung

$$m = 2 \Rightarrow \text{pro 1 nach rechts geht der Graph 2 nach oben}$$

Beispiel 2: Steigung aus einem Intervall ablesen

Formel (immer zuerst)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Bestimme die Sekantensteigung im Intervall $[1; 5]$.

Schritt 1: Aus dem Intervall x_1 und x_2 herauslesen

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

Schritt 2: $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ berechnen

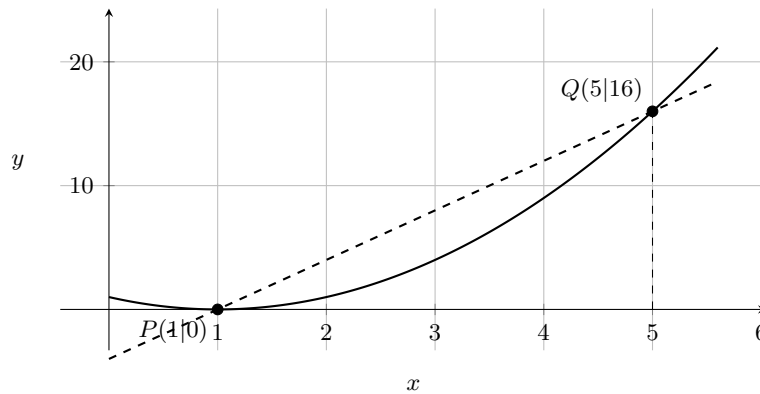
$$\begin{aligned} y_1 = f(1) &= 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 1 - 2 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 = f(5) &= 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 \\ &= 25 - 10 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Schritt 3: Steigung berechnen

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \\ &= \frac{16 - 0}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Skizze (Funktion + Sekante im Intervall)



Deutung

$$m = 4 \Rightarrow \text{im Mittel steigt } f \text{ um 4 pro 1 in } x$$

Beispiel 3: e-Funktion (Ergebnis am Ende gerundet)

Formel (immer zuerst)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = 2e^x - x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Bestimme die Sekantensteigung zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

Schritt 1: x_1 und x_2 festlegen

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

Schritt 2: $y_1 = h(x_1)$ und $y_2 = h(x_2)$ berechnen

$$y_1 = h(0) = 2e^0 - 0$$

$$= 2 \cdot 1$$

$$= 2$$

$$y_2 = h(2) = 2e^2 - 2$$

Schritt 3: Vollständige Punkte angeben und daraus x_1, x_2, y_1, y_2 ablesen

$$P(x_1|y_1) = P(0|2), \quad Q(x_2|y_2) = Q(2|2e^2 - 2)$$

Schritt 4: Steigung berechnen (am Ende runden)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0}$$

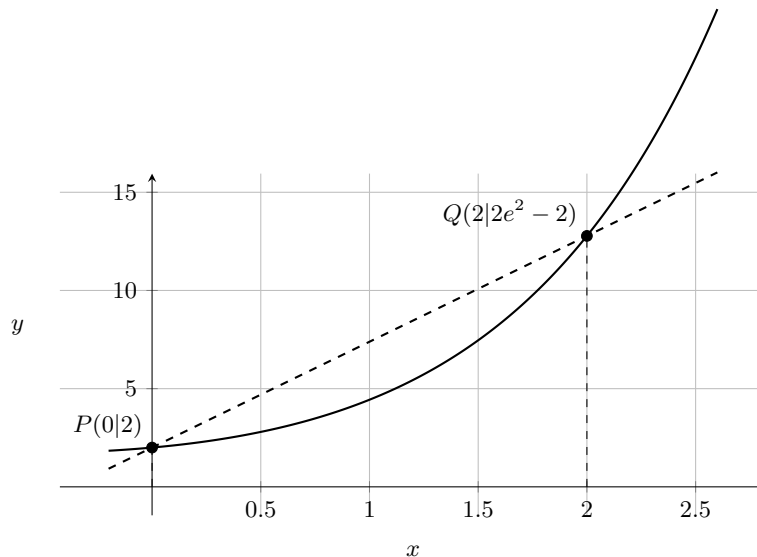
$$= \frac{(2e^2 - 2) - 2}{2}$$

$$= \frac{2e^2 - 4}{2}$$

$$= e^2 - 2$$

$$\approx 5,39$$

Skizze (e-Funktion + Sekante)



Deutung

$m \approx 5,39 \Rightarrow$ der Graph steigt im Mittel zwischen 0 und 2

Schnell-Check (damit nichts schief geht)

- Stimmen die Punkte? $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$
- Reihenfolge beibehalten: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (nicht mischen)
- Klammern setzen: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
- Prüfen: $x_2 \neq x_1$ (sonst Division durch 0)
- Plausibilität: Steigt der Graph im Bild? Dann sollte $m > 0$ sein

Tipps & typische Stolperfallen

- **Reihenfolge:** Erst x_1, x_2 klären, dann y_1, y_2 , dann Steigung
- **Formel immer zuerst:** $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
- **Klammern nicht vergessen:** $f(x_2) - f(x_1)$ immer in Klammern denken
- **Nenner prüfen:** $x_2 - x_1 \neq 0$, also $x_2 \neq x_1$
- **Zusammenhang zur Tangente:** Je kleiner das Intervall $[x_1; x_2]$, desto eher nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung an