Schnittwinkel – Übersicht

Schnittwinkel werden mithilfe des **Skalarprodukts** und der **Beträge (Längen)** der beteiligten Vektoren berechnet. Wichtig ist immer, die passenden Richtungs- oder Normalenvektoren zu verwenden.

a) Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben:

$\vec{u}, \ \vec{v}$

Idee: Der Winkel wird über das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ und die Beträge $|\vec{u}|$ und $|\vec{v}|$ bestimmt.

Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Hinweis: Kein Betrag um das Skalarprodukt, da hier der orientierte Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verwendet wird.

b) Winkel zwischen zwei Geraden

Gegeben:

$$g: \ \vec{x} = \vec{p}_g + t\,\vec{r}_g$$
$$h: \ \vec{x} = \vec{p}_h + s\,\vec{r}_h$$

$\vec{p}_g$ ist Ortsvektor (Stützvektor) und $\vec{r}_g$ ist Richtungsvektor von g
$\vec{p}_h$ ist Ortsvektor (Stützvektor) und $\vec{r}_h$ ist Richtungsvektor von h

Idee: Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$.

Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|}$$

Hinweis: Der Betrag im Zähler sorgt dafür, dass der spitze Schnittwinkel bestimmt wird.

c) Winkel zwischen Gerade und Ebene

Gegeben:

$$g: \ \vec{x} = \vec{p}_g + t\,\vec{r}_g$$

Ebene in
Normalenform:

$$(\vec{x} - \vec{p}_E) \cdot \vec{n} = 0$$

oder Koordinatenform:

$$n_1x + n_2y + n_3z = d \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

oder Parameterform:

$$\vec{x} = \vec{p}_E + s\,\vec{r}_1 + t\,\vec{r}_2$$

Hinweis: Wenn die Parameterform gegeben ist, musst du zuerst den Normalenvektor berechnen:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}$$

Idee: Der Winkel zwischen Gerade und Ebene wird über das Skalarprodukt von $\vec{r}_g$ und $\vec{n}$ sowie die Beträge $|\vec{r}_g|$ und $|\vec{n}|$ berechnet.

Formel:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{r}_g \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{n}|}$$

d) Winkel zwischen zwei Ebenen

Gegeben:
Normalenvektoren

$$\vec{n}_E, \ \vec{n}_F$$

Hinweis: $\vec{n}_E$ ist der Normalenvektor der Ebene E und $\vec{n}_F$ ist der Normalenvektor der Ebene F

Idee: Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren. Er wird über das Skalarprodukt $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F$ und die Beträge $|\vec{n}_E|$ und $|\vec{n}_F|$ bestimmt.

Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$

Hinweis: Normalenvektor aus der Parameterform:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}$$