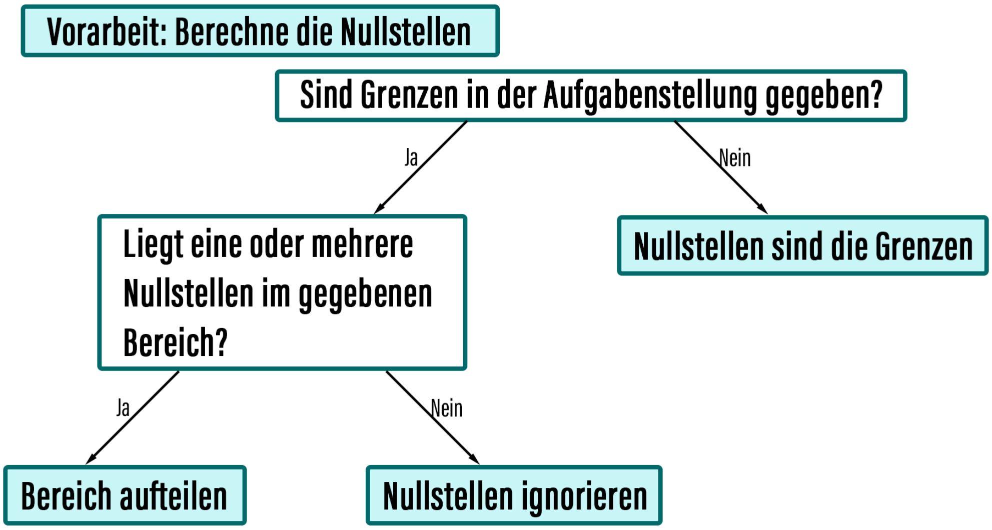
Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse

Wenn nach dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse gefragt ist, muss man immer zuerst prüfen, ob Nullstellen vorhanden sind und ob ein gegebener Bereich dadurch aufgeteilt werden muss.



Wichtig: Ein bestimmtes Integral kann negativ werden. Ein **Flächeninhalt** darf aber nie negativ sein. Deshalb werden Teilflächen am Ende immer **positiv** addiert

---

Beispiel 1: Funktion gegeben ohne Intervall

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$
Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse
Schritt 1: Nullstellen berechnen

$$\begin{aligned}
-x^2 + 4 &= 0 \\
-x^2 &= -4 \quad |:(-1) \\
x^2 &= 4 \quad |\sqrt{} \\
x_1 &= -2, \quad x_2 = 2
\end{aligned}$$

Da kein Intervall gegeben ist, sind die Nullstellen gleichzeitig die Grenzen

$$a = -2, \quad b = 2$$

Schritt 2: Integral aufstellen

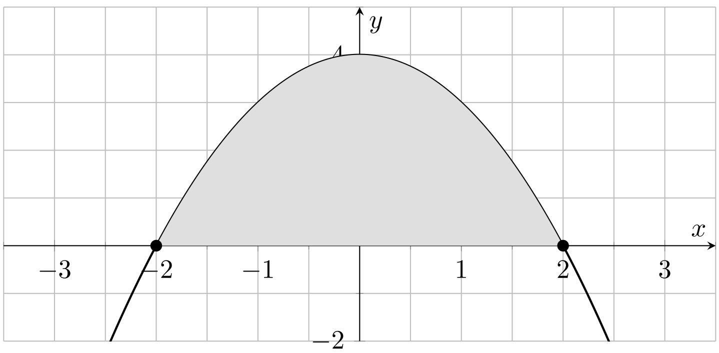
$$A = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\, dx$$

Schritt 3: Integral berechnen

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\, dx \\
&= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{-2}^{2} \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 4\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-2)\right) \\
&= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) \\
&= \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) \\
&= \frac{32}{3}\ \text{FE}
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $A = \frac{32}{3}$ FE

Graph zur Veranschaulichung



Beispiel 2: Funktion gegeben mit Intervall, eine Nullstelle liegt im Intervall

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$
Gesucht ist der Flächeninhalt im Intervall $[0; 2]$
Schritt 1: Nullstellen berechnen

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 = 0 &\quad | +1 \\
x^2 = 1 &\quad | \sqrt{\ } \\
x_1 = -1, &\quad x_2 = 1
\end{aligned}
$$

Schritt 2: Prüfen, ob Nullstellen im Intervall liegen

$x_2 = 1 \in [0; 2] \Rightarrow$ der Bereich muss aufgeteilt werden

$\Rightarrow [0; 1]$ und $[1; 2]$

Hinweis: Da $x_1 = -1$ nicht in $[0; 2]$ liegt, kann diese Nullstelle ignoriert werden
Schritt 3: Integrale aufstellen

$$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 1)\,dx$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$$

Schritt 4: Berechnung der einzelnen Integrale

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 (x^2 - 1)\,dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 1\cdot 0\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} - 1\right) - 0 \\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Da A_1 unter der x-Achse liegt, nehmen wir für den Flächeninhalt den positiven Wert:

$$A_1 = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\,\text{FE}$$

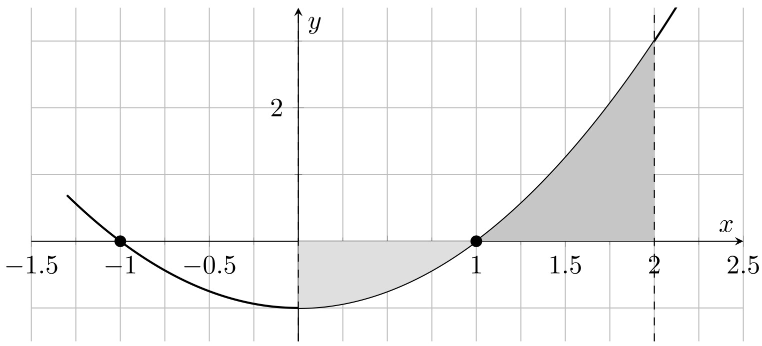
$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 1\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1\cdot 1\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\,\text{FE}
\end{aligned}$$

Schritt 5: Beide Flächen für den Gesamtflächeninhalt addieren

$$\begin{aligned}
A_{\text{ges}} &= A_1 + A_2 \\
&= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{6}{3} \\
&= 2\,\text{FE}
\end{aligned}$$

Ergebnis: $A_{\text{ges}} = 2\,\text{FE}$

Graph zur Veranschaulichung



Beispiel 3: Funktion gegeben mit Intervall, keine Nullstelle liegt im Intervall

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 8$ mit $x \in \mathbb{R}$
Gesucht ist der Flächeninhalt im Intervall $[-1; 1]$
Schritt 1: Nullstellen berechnen
Variante 1: pq-Formel

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Hier ist

$$p = 2, \quad q = -8$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} \\
x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1+8} \\
x_{1,2} &= -1 \pm 3
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

Variante 2: Mitternachtsformel

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Hier ist

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -8$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

Also gilt wieder:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

Schritt 2: Prüfen, ob aufgeteilt werden muss
Das Intervall ist $[-1; 1]$

$$x_1 = -4 \notin [-1; 1]$$

$$x_2 = 2 \notin [-1; 1]$$

Da keine Nullstelle im Intervall $[-1; 1]$ liegt, muss der Bereich nicht aufgeteilt werden

$\Rightarrow$ Nullstellen ignorieren

Wichtig: Obwohl die Funktion Nullstellen hat, liegen diese nicht im gegebenen Intervall. Deshalb wird hier **nicht** aufgeteilt

Schritt 3: Integral aufstellen

$$A = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 8)\, dx$$

Schritt 4: Integral berechnen

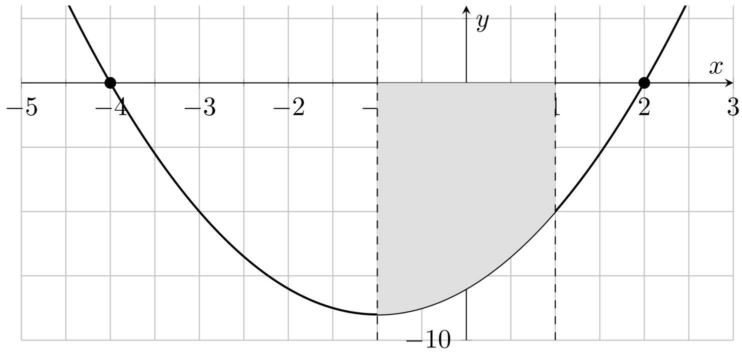
$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 8)\, dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x \right) \Big|_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 8 \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 8 \cdot (-1) \right) \\
&= \left(\frac{1}{3} + 1 - 8 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 + 8 \right) \\
&= \left(-\frac{20}{3} \right) - \left(\frac{26}{3} \right) \\
&= -\frac{46}{3}
\end{aligned}$$

Da der Graph im gesamten Intervall unter der x-Achse liegt, nehmen wir für den Flächeninhalt den positiven Wert:

$$A = \left| -\frac{46}{3} \right| = \frac{46}{3} \text{ FE}$$

Ergebnis: $A = \frac{46}{3}$ FE

Graph zur Veranschaulichung



Beispiel 4: Funktion gegeben ohne Intervall, drei Nullstellen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ mit $x \in \mathbb{R}$
Gesucht ist der gesamte Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse
Schritt 1: Nullstellen berechnen

$$\begin{aligned} x^3 - 4x &= 0 \quad |\text{ausklammern} \\ x(x^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgen zwei Fälle:

$$x = 0$$

oder

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \quad | + 4 \\ x^2 &= 4 \quad |\sqrt{\ } \\ x &= -2 \quad \text{und} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Nullstellen ordnen:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

Schritt 2: Bereich bestimmen
Da kein Intervall gegeben ist, sind die Nullstellen die Grenzen
Zwischen zwei benachbarten Nullstellen liegt jeweils eine einzelne Teilfläche

Mit drei Nullstellen entstehen also zwei einzelne Flächen

$$[-2;0] \quad \text{und} \quad [0;2]$$

Hinweis:

$$\text{Anzahl der Integrale} = \text{Anzahl der Nullstellen} - 1$$

Also hier:

$$3 - 1 = 2$$

Schritt 3: Integrale aufstellen

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx$$

Schritt 4: Berechnung der einzelnen Integrale

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} \\
&= \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - 2\cdot(-2)^2\right) \\
&= 0 - (4 - 8) \\
&= 4\,\text{FE}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big|_{0}^{2} \\
&= \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2\right) \\
&= (4 - 8) - 0 \\
&= -4
\end{aligned}$$

Da A_2 unter der x-Achse liegt, nehmen wir für den Flächeninhalt den positiven Wert:

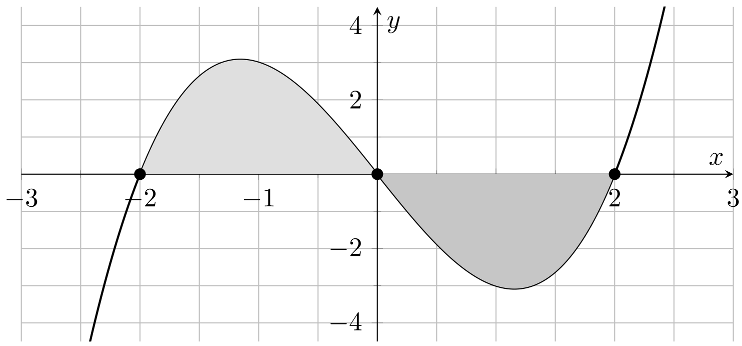
$$A_2 = |-4| = 4\,\text{FE}$$

Schritt 5: Beide Flächen für den Gesamtflächeninhalt addieren

$$\begin{aligned}
A_{\text{ges}} &= A_1 + A_2 \\
&= 4 + 4 \\
&= 8\,\text{FE}
\end{aligned}$$

Ergebnis: $A_{\text{ges}} = 8\,\text{FE}$

Graph zur Veranschaulichung



Zusammenfassung

1. Nullstellen berechnen
2. Prüfen, ob Grenzen gegeben sind
3. Wenn kein Intervall gegeben ist, sind die Nullstellen die Grenzen
4. Prüfen, ob Nullstellen im Intervall liegen
5. Falls ja: Bereich aufteilen
6. Einzelne Integrale berechnen
7. Negative Ergebnisse als Flächeninhalt positiv nehmen
8. Alle Teilflächen addieren

Merke:
Beim Flächeninhalt immer am Ende fragen:
Muss ich etwas positiv machen oder den Bereich aufteilen?