

Übung 1

Eine Hühnerfarm mit sehr vielen Hühnern ermittelt eine Woche lang die Masse von jedem gelegten Ei. Es zeigt sich, dass für die Zufallsgröße X „Masse eines Eies in Gramm“ dieses Modell der Normalverteilung mit $\mu = 54$ g und $\sigma = 2$ g geeignet ist.

- a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse für zufällig der Produktion entnommene Eier:
- A: Ein Ei wiegt mindestens 48 g.
 - B: Die Masse der Eier liegt zwischen 50 g und 58 g.
 - C: Ein Ei wiegt 56 g.
- b) Ermitteln Sie, welches Mindestgewicht die 25% schwersten Eier haben.

Lösung

Gegeben ist:

$$X \sim \mathcal{N}(54; 2)$$

Das bedeutet:

$$\mu = 54 \quad \text{und} \quad \sigma = 2$$

a) Wahrscheinlichkeiten berechnen

A: Ein Ei wiegt mindestens 48 g

Ansatz:

$$P(X \geq 48)$$

Für den GTR brauchen wir eine untere und eine obere Grenze.
„Mindestens 48 g“ bedeutet:

$$P(48 \leq X \leq 10^9)$$

Die obere Grenze 10^9 ist einfach eine sehr große Zahl und steht praktisch für „bis unendlich“.

GTR-Eingabe:

$$\text{lower} = 48, \quad \text{upper} = 10^9, \quad \mu = 54, \quad \sigma = 2$$

Ergebnis:

$$P(X \geq 48) \approx 0,9987$$

Also:

$$P(X \geq 48) \approx 99,87\%$$

B: Die Masse der Eier liegt zwischen 50 g und 58 g

Ansatz:

$$P(50 \leq X \leq 58)$$

Das können wir direkt so in den GTR eingeben, weil schon ein Intervall gegeben ist.

GTR-Eingabe:

$$\text{lower} = 50, \quad \text{upper} = 58, \quad \mu = 54, \quad \sigma = 2$$

Ergebnis:

$$P(50 \leq X \leq 58) \approx 0,9545$$

Also:

$$P(50 \leq X \leq 58) \approx 95,45\%$$

C: Ein Ei wiegt 56 g

Ansatz:

$$P(X = 56)$$

Bei der Normalverteilung gilt:

$$P(X = 56) = 0$$

Erklärung:

Die Normalverteilung ist stetig. Das bedeutet: Ein einzelner genauer Wert hat immer die Wahrscheinlichkeit 0. Nur Intervalle haben eine Wahrscheinlichkeit.

Ergebnis:

$$\boxed{P(X = 56) = 0}$$

b) Mindestgewicht der 25% schwersten Eier

Gesucht ist das Mindestgewicht der 25% schwersten Eier.

Das bedeutet:

Die schwersten 25% liegen rechts von einer Grenze m .

Also:

$$P(X \geq m) = 0,25$$

Das ist der Ansatz.

Jetzt stellt man um auf die linke Fläche, weil der GTR bei der inversen Normalverteilung meist mit der linken Fläche arbeitet.

Das bedeutet:

Man gibt im GTR normalerweise an, wie groß die Wahrscheinlichkeit links von einem gesuchten Wert ist.

Hier ist aber zuerst die rechte Fläche gegeben, nämlich 25%.

Deshalb müssen wir umformen.

Da die gesamte Fläche unter der Normalverteilung immer 1 ist, gilt:

$$P(X \leq m) = 1 - 0,25$$

$$P(X \leq m) = 0,75$$

Ansatz daneben:

$$P(X \geq m) = 0,25$$

$$\Rightarrow P(X \leq m) = 0,75$$

Gesucht ist also der Wert m , bei dem links 75% liegen.

Dann liegen automatisch rechts 25% der Eier.

Genau das ist mit den 25% schwersten Eiern gemeint.

GTR-Eingabe:

Wir benutzen die inverse Normalverteilung.

Dort geben wir ein:

$$\text{Fläche} = 0,75, \quad \mu = 54, \quad \sigma = 2$$

Ergebnis:

$$m \approx 55,35$$

Also:

$$m \approx 55,35 \text{ g}$$

Antwortsatz:

Das Mindestgewicht der 25% schwersten Eier beträgt etwa 55,35 g.

Endergebnisse

$$P(X \geq 48) \approx 0,9987$$

$$P(50 \leq X \leq 58) \approx 0,9545$$

$$P(X = 56) = 0$$

$$m \approx 55,35 \text{ g}$$