

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 1: Was ist eine Gleichung?

Der Unterschied zwischen Term, Gleichung und Funktion

Bevor du ganzrationale Gleichungen lösen kannst, musst du zuerst verstehen, was eine Gleichung überhaupt ist.

In diesem Kapitel klären wir deshalb die Grundlagen:

- Was ist ein Term?
- Was ist eine Gleichung?
- Was bedeutet es, eine Gleichung zu lösen?
- Was ist der Unterschied zwischen Term, Gleichung und Funktion?
- Warum ist dieser Unterschied in der Oberstufe so wichtig?

Erst verstehen, was vor dir steht. Dann kannst du richtig rechnen.

Inhaltsverzeichnis

1. Was ist ein Term?	2
2. Was ist eine Gleichung?	2
3. Was bedeutet eine Gleichung lösen?	3
4. Was ist eine Funktion?	4
5. Term, Gleichung und Funktion im Vergleich	5
6. Warum ist der Unterschied wichtig?	5
7. Kleine Übung	6
8. Mini-Checkliste	7
Zusammenfassung	8

1. Was ist ein Term?

Ein Term ist ein Rechenausdruck.

Er kann Zahlen, Variablen und Rechenzeichen enthalten.

$$2x + 5$$

Das ist ein Term.

Er enthält kein Gleichheitszeichen.

Merksatz

Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck ohne Gleichheitszeichen.

Einen Term kann man vereinfachen, zusammenfassen oder für bestimmte Werte berechnen.

Beispiel

Gegeben ist der Term:

$$2x + 5$$

Setzen wir $x = 3$ ein:

$$2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$

Der Term hat für $x = 3$ den Wert 11.

Tipp

Bei einem Term fragst du dich meistens:

Was kommt heraus, wenn ich einen Wert einsetze?

2. Was ist eine Gleichung?

Eine Gleichung besteht aus zwei Seiten mit einem Gleichheitszeichen dazwischen.

$$\text{linke Seite} = \text{rechte Seite}$$

Zum Beispiel:

$$2x + 5 = 13$$

Links steht der Term $2x + 5$.

Rechts steht die Zahl 13.

Merksatz

Eine Gleichung ist eine mathematische Aussage mit einem Gleichheitszeichen.

Beim Lösen sucht man alle Werte für x , für die die Aussage stimmt.

Beispiel

Gegeben ist die Gleichung:

$$2x + 5 = 13$$

Wir fragen uns: Welche Zahl muss ich für x einsetzen, damit links wirklich 13 herauskommt?

Setzen wir $x = 4$ ein:

$$2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$$

Also ist $x = 4$ eine Lösung.

Achtung

Eine Gleichung ist nicht einfach nur ein Rechenausdruck.

Eine Gleichung enthält immer ein Gleichheitszeichen und stellt eine Aussage auf.

3. Was bedeutet eine Gleichung lösen?

Eine Gleichung lösen bedeutet:

Alle Zahlen finden, die die Gleichung wahr machen

Bei der Gleichung

$$2x + 5 = 13$$

ist $x = 4$ eine Lösung, denn:

$$2 \cdot 4 + 5 = 13$$

Kurze Rechnung

$$2x + 5 = 13 \quad | -5$$

$$2x = 8 \quad | :2$$

$$x = 4$$

Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{4\}$$

Merksatz

Die Lösungsmenge enthält alle Lösungen einer Gleichung.

Wenn die Gleichung nur die Lösung 4 hat, schreibt man:

$$L = \{4\}$$

Probe

Bei der Probe setzt man die gefundene Lösung wieder in die ursprüngliche Gleichung ein.

$$2x + 5 = 13$$

$$2 \cdot 4 + 5 = 13$$

$$8 + 5 = 13$$

$$13 = 13$$

Die Aussage stimmt. Also ist $x = 4$ wirklich eine Lösung.

Tipp

Eine Probe ist besonders hilfreich, wenn du unsicher bist.

Du prüfst damit, ob deine berechnete Lösung wirklich zur ursprünglichen Gleichung passt.

4. Was ist eine Funktion?

Eine Funktion beschreibt eine Zuordnung.

Zum Beispiel:

$$f(x) = 2x + 5$$

Das bedeutet: Zu jedem erlaubten x -Wert gehört ein Funktionswert $f(x)$.

Merksatz

Eine Funktion ordnet jedem x -Wert einen Funktionswert zu.

Eine Funktion löst man nicht. Man untersucht sie.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 2x + 5$$

Setzen wir $x = 3$ ein:

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$$

Der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ ist also:

$$f(3) = 11$$

Was untersucht man bei Funktionen?

Bei Funktionen fragt man zum Beispiel:

- Wo sind die Nullstellen?
- Wie verläuft der Graph?
- Wo steigt oder fällt die Funktion?
- Wo liegen Hochpunkte oder Tiefpunkte?
- Welche Steigung hat die Funktion an einer Stelle?

Achtung

Eine Funktion und eine Gleichung sehen manchmal ähnlich aus.
Aber sie haben unterschiedliche Aufgaben:

Eine Funktion untersucht man. Eine Gleichung löst man.

5. Term, Gleichung und Funktion im Vergleich

Begriff	Bedeutung	Beispiel
Term	Ein Rechenausdruck ohne Gleichheitszeichen	$2x + 5$
Gleichung	Zwei Seiten mit Gleichheitszeichen. Man sucht passende x -Werte	$2x + 5 = 13$
Funktion	Eine Zuordnung. Zu jedem x gehört ein Funktionswert	$f(x) = 2x + 5$

Merksatz

Ein Term wird berechnet.
Eine Gleichung wird gelöst.
Eine Funktion wird untersucht.

Drei ähnliche Ausdrücke

$$2x + 5$$

Das ist ein Term.

$$2x + 5 = 13$$

Das ist eine Gleichung.

$$f(x) = 2x + 5$$

Das ist eine Funktion.

Tipp

Achte zuerst auf das Zeichen und die Schreibweise:

- Kein Gleichheitszeichen? Oft ein Term.
- Gleichheitszeichen mit gesuchtem x ? Oft eine Gleichung.
- $f(x) = \dots$? Oft eine Funktion.

6. Warum ist der Unterschied wichtig?

In der Oberstufe arbeitet man sehr oft mit Funktionen.
Aber sobald man etwas Bestimmtes sucht, entsteht daraus häufig eine Gleichung.

Beispiel: Nullstellen

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Wenn man die Nullstellen sucht, fragt man:

$$f(x) = 0$$

Also entsteht die Gleichung:

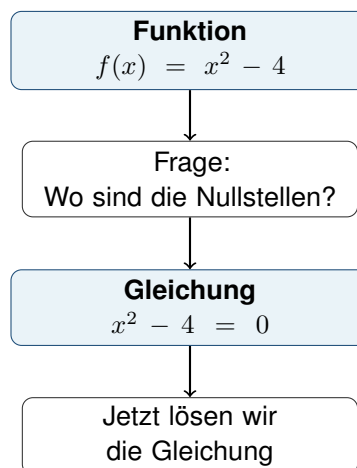
$$x^2 - 4 = 0$$

Diese Gleichung muss man lösen.

Merksatz

Viele Aufgaben in der Analysis bestehen aus zwei Teilen:

1. Eine Funktion verstehen oder untersuchen
2. Eine passende Gleichung aufstellen und lösen

**Tipp**

Der Übergang von der Funktion zur Gleichung ist in der Oberstufe extrem wichtig. Zum Beispiel bei Nullstellen, Schnittpunkten, Extrempunkten und Wendepunkten.

7. Kleine Übung

Ordne jeweils zu: Term, Gleichung oder Funktion.

Beispiel

1. $3x^2 - 5x + 1$
2. $3x^2 - 5x + 1 = 0$
3. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
4. $7x - 4 = 10$
5. $g(x) = 7x - 4$
6. $7x - 4$

Lösung

- | | | |
|----|------------------------|-----------|
| 1. | $3x^2 - 5x + 1$ | Term |
| 2. | $3x^2 - 5x + 1 = 0$ | Gleichung |
| 3. | $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ | Funktion |
| 4. | $7x - 4 = 10$ | Gleichung |
| 5. | $g(x) = 7x - 4$ | Funktion |
| 6. | $7x - 4$ | Term |

8. Mini-Checkliste**Mini-Checkliste**

Wenn du einen mathematischen Ausdruck siehst, frage dich:

- Gibt es ein Gleichheitszeichen?
- Steht dort $f(x) = \dots$ oder $g(x) = \dots$?
- Soll ich nur etwas einsetzen und berechnen?
- Soll ich passende x -Werte finden?
- Soll ich eine Funktion untersuchen?

Term berechnen, Gleichung lösen, Funktion untersuchen

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 1 mitnehmen:

1. Ein Term ist ein Rechenausdruck ohne Gleichheitszeichen.
2. Eine Gleichung hat ein Gleichheitszeichen.
3. Eine Gleichung lösen bedeutet: alle passenden x -Werte finden.
4. Eine Funktion beschreibt eine Zuordnung.
5. Eine Funktion untersucht man.
6. Aus einer Funktion entsteht oft eine Gleichung, wenn man etwas Bestimmtes sucht.
7. Der wichtigste Unterschied lautet:

Term berechnen, Gleichung lösen, Funktion untersuchen

Wichtigster Gedanke

Bevor du rechnest, musst du erkennen, was vor dir steht.
Erst dann weißt du, ob du berechnen, lösen oder untersuchen sollst.