

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 3: Das Schema

Wie du erkennst, welche Lösungsstrategie passt

In Kapitel 1 hast du gelernt, was eine Gleichung ist.
In Kapitel 2 hast du gesehen, wofür man Gleichungen in der Schule braucht.
Jetzt geht es um die nächste wichtige Frage:

Welche Lösungsstrategie passt zu welcher Gleichung?

Dafür benutzen wir ein Schema.
Das Schema hilft dir nicht beim Auswendiglernen, sondern beim Erkennen.

Inhaltsverzeichnis

1. Warum braucht man ein Schema?	2
2. Vor dem Schema: Gleichung vorbereiten	2
3. Wie entsteht eine Gleichung aus einer Funktion?	3
4. Das Schema zur Analyse	4
5. Begriffserklärungen	4
6. Wie benutzt man das Schema?	6
7. Mini-Checkliste	7
Zusammenfassung	8

1. Warum braucht man ein Schema?

Bei ganzrationalen Gleichungen gibt es verschiedene Lösungswege.
Zum Beispiel:

- nach einer Potenz umformen und Wurzel ziehen
- ausklammern
- pq-Formel oder Mitternachtsformel
- Substitution
- Polynomdivision oder Horner-Schema

Das Problem ist oft nicht die einzelne Methode.
Das Problem ist meistens die Entscheidung:

Welche Methode soll ich hier überhaupt nehmen?

Merksatz

Das Schema hilft dir, eine Gleichung zuerst zu analysieren.
Erst danach entscheidest du, welche Lösungsstrategie sinnvoll ist.

2. Vor dem Schema: Gleichung vorbereiten

Bevor du das Schema benutzt, ist die Gleichung oft noch nicht in der passenden Form.
Sehr häufig musst du vorher:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen
- die Gleichung nach 0 auflösen

Merksatz

Bei ganzrationalen Gleichungen ist eine wichtige Grundform:

$$\text{Term} = 0$$

Erst wenn die Gleichung passend vorbereitet ist, kann man sinnvoll erkennen, welche Methode passt.

Beispiel

Eine Gleichung kann zum Beispiel so entstehen:

$$f(x) = 0$$

Dann steht die Gleichung schon durch die Bedingung „Nullstelle“ auf 0.
Bei Schnittpunkten entsteht dagegen oft zuerst:

$$f(x) = g(x)$$

Dann muss man häufig erst umformen:

$$f(x) - g(x) = 0$$

Achtung

Wichtig: Nicht jede Gleichung steht sofort so da, dass du das Schema direkt benutzen kannst. Oft musst du sie erst vereinfachen und nach 0 auflösen.

3. Wie entsteht eine Gleichung aus einer Funktion?

In der Analysis entsteht eine Gleichung oft durch eine bestimmte Bedingung.

Gesucht	Daraus entsteht häufig
Nullstellen	$f(x) = 0$
Schnittpunkte	$f(x) = g(x)$, danach oft auf 0 bringen
mögliche Extremstellen	$f'(x) = 0$
mögliche Wendestellen	$f''(x) = 0$
bestimmte Steigung	$f'(x) = m$, danach oft umformen
Integrationsgrenzen / Flächengrenzen	häufig $f(x) = 0$ oder $f(x) = g(x)$

Tipp

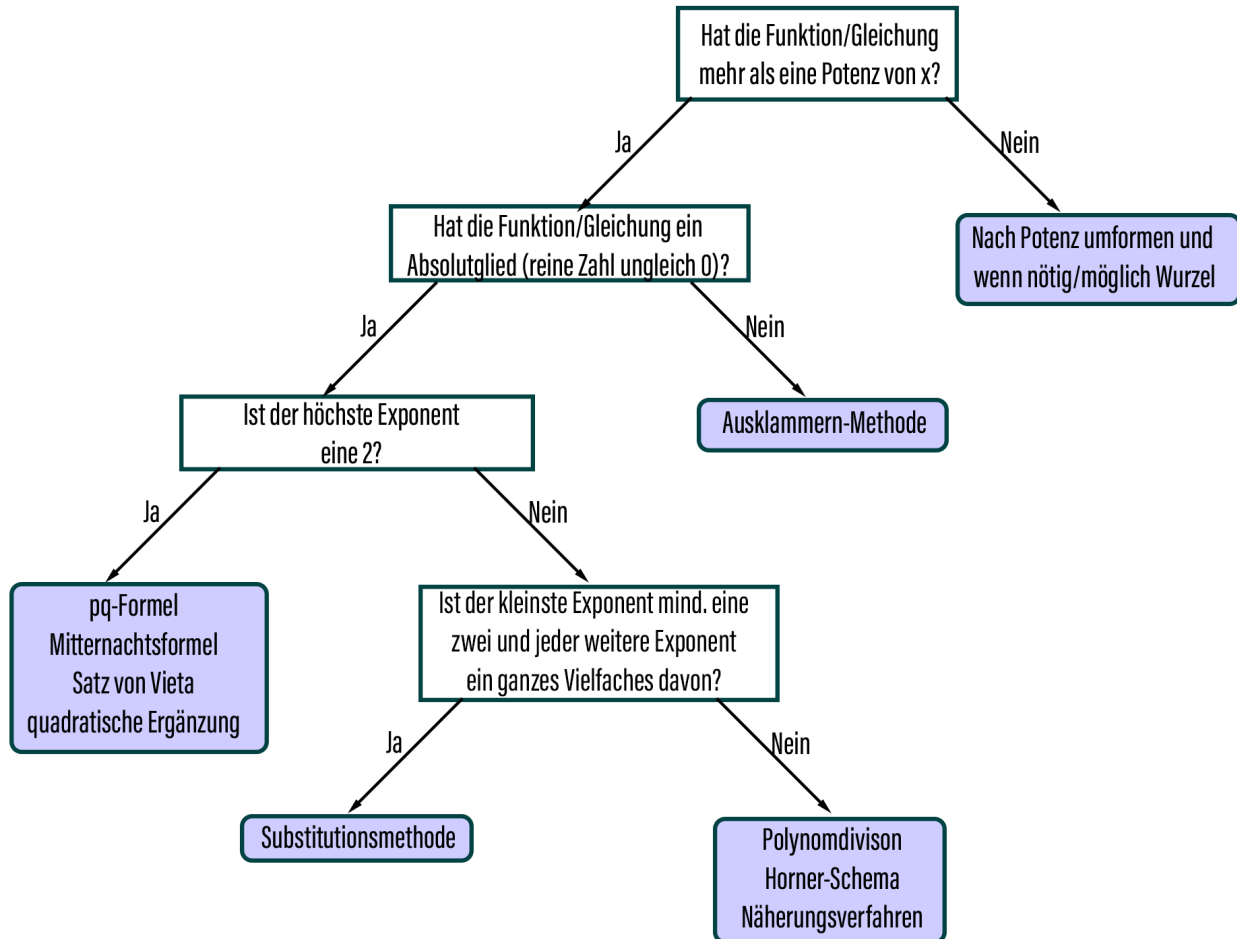
Oft gilt also diese Reihenfolge:

Bedingung aufstellen → Gleichung vereinfachen → Schema benutzen

4. Das Schema zur Analyse

Das folgende Schema hilft dir bei der Frage:

Welche Struktur hat meine Gleichung?



5. Begriffserklärungen

Was ist eine Potenz?

Eine Potenz ist eine Schreibweise wie x^2 , x^3 oder x^4 .
Man kann auch sagen:

Potenz = x hoch Zahl

Bei einer Potenz gibt es zwei wichtige Teile:

$$x^3$$

Dabei ist:

- x die Basis
- 3 der Exponent

Merksatz

Die Basis steht unten.
Der Exponent steht oben.
Zusammen bilden Basis und Exponent die Potenz.

Das bedeutet:

$$x = x^1$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

Tipp

Auch

$$x = x^1$$

ist eine Potenz von x .
Der Exponent 1 wird meistens nicht extra hingeschrieben.

Beispiel

In der Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

kommen die Potenzen

$$x^4 \quad \text{und} \quad x^2$$

vor.

Was ist ein Absolutglied?

Ein Absolutglied ist eine reine Zahl ohne x .
Zum Beispiel:

$$x^3 + 2x^2 - 5$$

Hier ist -5 das Absolutglied.

Merksatz

Ein Absolutglied ist der Teil eines Terms, der kein x enthält.

Beispiel

In der Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 5 = 0$$

ist

$$-5$$

das Absolutglied.

Tipp

Wenn kein Absolutglied vorkommt, kann man oft etwas ausklammern.
Das ist ein wichtiger Hinweis auf die Ausklammern-Methode.

Was ist ein Vielfaches?

Ein Vielfaches entsteht, wenn man eine Zahl mit einer ganzen Zahl multipliziert.
Zum Beispiel sind Vielfache von 2:

2, 4, 6, 8, 10, ...

Denn:

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

Merksatz

Eine Zahl ist ein Vielfaches einer anderen Zahl, wenn sie durch diese Zahl ohne Rest teilbar ist.

Beispiel

Im Schema geht es manchmal um die Exponenten.

Bei der Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

kommen die Exponenten 4 und 2 vor.

Der kleinste Exponent ist 2.

Der Exponent 4 ist ein Vielfaches von 2, denn:

$$4 = 2 \cdot 2$$

Deshalb passt diese Gleichung oft zur Substitutionsmethode.

Tipp

Im Schema prüfst du bei manchen Gleichungen:

Sind die größeren Exponenten Vielfache des kleinsten Exponenten?

Wenn ja, kann Substitution oft sinnvoll sein.

6. Wie benutzt man das Schema?

Das Schema soll dir helfen, nicht planlos zu rechnen.

Die Reihenfolge ist:

Gleichung vorbereiten → anschauen → erkennen → Methode wählen → rechnen

Merksatz

Du benutzt das Schema als Entscheidungshilfe.

Zuerst bereitest du die Gleichung vor. Danach schaust du dir ihre Form an und leitest daraus eine passende Methode ab.

Achtung

Nicht sofort losrechnen.

Frage dich zuerst:

- Muss ich die Gleichung erst vereinfachen?
- Steht sie schon in der Form $\text{Term} = 0$?
- Welche Potenzen kommen vor?
- Gibt es ein Absolutglied?
- Kann man ausklammern?
- Ist der höchste Exponent 2?
- Passen die Exponenten zur Substitution?

7. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Bevor du das Schema benutzt, frage dich:

- Ist die Gleichung aus einer Bedingung entstanden, zum Beispiel $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ oder $f(x) = g(x)$?
- Muss ich die Gleichung noch vereinfachen?
- Muss ich Klammern auflösen?
- Muss ich Terme zusammenfassen?
- Muss ich alles auf eine Seite bringen?
- Steht am Ende eine Gleichung der Form $\text{Term} = 0$?
- Welche Potenzen von x kommen vor?
- Gibt es ein Absolutglied?
- Sind die größeren Exponenten Vielfache des kleinsten Exponenten?
- Welche Methode schlägt das Schema vor?

Erst vorbereiten, dann analysieren, dann lösen

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 3 mitnehmen:

1. Das Schema hilft dir, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.
2. Bevor du das Schema benutzt, muss die Gleichung oft vorbereitet werden.
3. Häufig musst du vereinfachen, zusammenfassen und nach 0 auflösen.
4. In der Analysis entsteht eine Gleichung oft durch Bedingungen wie $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ oder $f(x) = g(x)$.
5. Eine Potenz ist eine Schreibweise wie x^2 , x^3 oder x^4 .
6. Bei einer Potenz steht unten die Basis und oben der Exponent.
7. Auch $x = x^1$ ist eine Potenz.
8. Ein Absolutglied ist eine reine Zahl ohne x .
9. Ein Vielfaches entsteht durch Multiplizieren mit einer ganzen Zahl.
10. Wichtig sind besonders die Potenzen von x , das Absolutglied und die Frage nach Vielfachen.

Wichtigster Gedanke

Das Schema benutzt du erst, wenn die Gleichung vorbereitet ist.
Dann hilft es dir, die passende Methode zu erkennen.