

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.1: Umformen und Wurzel

Eine Lösungsstrategie für Gleichungen mit nur einer Potenz von x

In diesem Kapitel lernst du die erste Lösungsstrategie kennen:

Umformen und wenn möglich Wurzel ziehen

Diese Strategie ist besonders hilfreich, wenn nach dem Vereinfachen nur **eine Potenz von** x vorkommt. Wichtig ist dabei: Du erkennst die Strategie oft erst, nachdem du die Gleichung vorbereitet hast.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen	2
2. Strategie erkennen	2
3. Schema als Hilfestellung	3
4. Die Schritte	4
5. Beispiel	4
6. Mini-Checkliste	6
Zusammenfassung	6

1. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Oft gilt:

Erst vorbereiten, dann Methode erkennen

Bevor du entscheidest, ob die Strategie „Umformen und Wurzel“ passt, musst du die Gleichung häufig zuerst vereinfachen.

Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen
- die Gleichung nach 0 auflösen

Merksatz

Bei ganzrationalen Gleichungen ist eine wichtige Grundform:

$$\text{Term} = 0$$

Erst wenn die Gleichung passend vorbereitet ist, kann man sinnvoll erkennen, welche Methode passt.

Tipp

Eine Gleichung kann am Anfang noch unübersichtlich aussehen.
Nach dem Vereinfachen erkennt man aber oft: Es kommt nur eine Potenz von x vor.

2. Strategie erkennen

Diese Strategie passt, wenn nach dem Vereinfachen nur **eine Potenz von** x vorkommt.

Zum Beispiel:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4$$

Dabei gilt auch:

$$x = x^1$$

Auch x allein ist also eine Potenz von x .

Merksatz

Die Strategie „Umformen und Wurzel“ passt, wenn nach dem Vereinfachen nur eine Potenz von x vorkommt und sonst nur Zahlen.

Typische Formen sind:

$$a \cdot x + b = 0$$

$$a \cdot x^2 + b = 0$$

$$a \cdot x^3 + b = 0$$

$$a \cdot x^4 + b = 0$$

Achtung

Nicht passend wäre zum Beispiel:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Hier kommen x^4 und x^2 vor.

Das ist nicht die Strategie „Umformen und Wurzel“, sondern eher ein Hinweis auf Substitution.

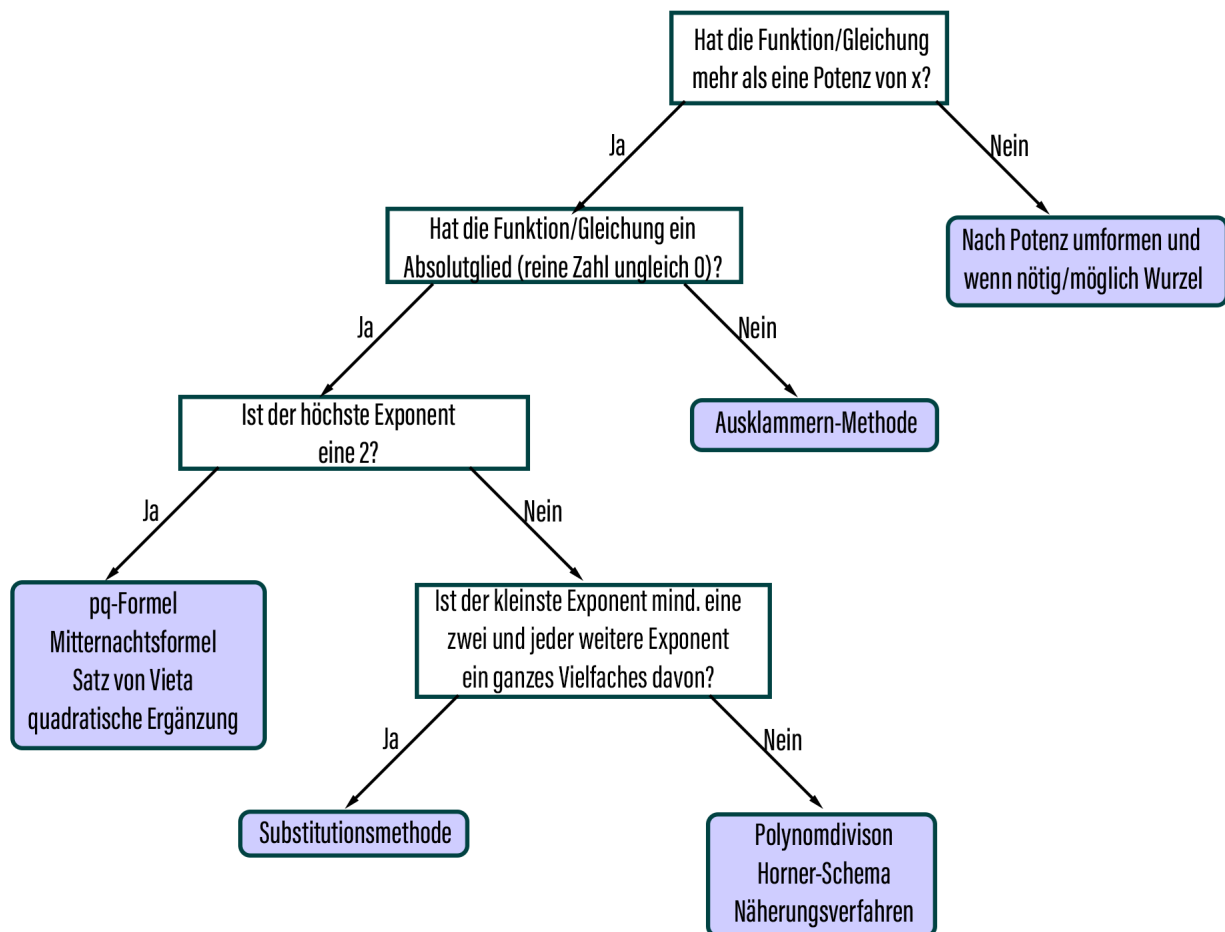
3. Schema als Hilfestellung

Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.

Für diese Strategie ist besonders die Frage wichtig:

Kommt nur eine Potenz von x vor?

Wenn ja, kannst du häufig nach dieser Potenz umformen und dann, wenn nötig und möglich, eine Wurzel ziehen.

**Tipp**

Das Schema ersetzt nicht die Rechnung.

Es hilft dir nur dabei, die passende Methode zu erkennen.

4. Die Schritte

Merksatz

Die Grundidee dieser Strategie ist:

$$x^n = \text{Zahl}$$

Du formst also so lange um, bis die Potenz von x alleine steht.

1. Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Klammern auflösen, Terme zusammenfassen und alles auf eine Seite bringen

2. Schritt 2: Nach x^n auflösen

Die Potenz von x soll alleine stehen:

$$x^n = \text{Zahl}$$

3. Schritt 3: Wenn nötig und möglich: Wurzel ziehen

Bei gerader Potenz auf zwei Lösungen achten:

$$x = \pm \sqrt[n]{\text{Zahl}}$$

4. Schritt 4: Lösungsmenge angeben

Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

$$L = \{\dots\}$$

Achtung

Bei gerader Potenz, also zum Beispiel x^2 , x^4 , x^6 , ..., kann es zwei reelle Lösungen geben. Wenn rechts eine negative Zahl steht, gibt es bei gerader Potenz keine reelle Lösung.

Tipp

Bei ungerader Potenz, also zum Beispiel x^3 , darf rechts auch eine negative Zahl stehen. Zum Beispiel:

$$x^3 = -8$$

hat die Lösung:

$$x = -2$$

5. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$2 \cdot (x^2 + 4) - 7 = 3x^2 - 3$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Ausgefüllte Lösung**Schritt 1: Gleichung vereinfachen**

Zuerst lösen wir die Klammer auf, fassen zusammen und bringen dann alles auf eine Seite.

$$\begin{aligned}2 \cdot (x^2 + 4) - 7 &= 3x^2 - 3 \\2x^2 + 8 - 7 &= 3x^2 - 3 \\2x^2 + 1 &= 3x^2 - 3 \quad | - 3x^2 \\-x^2 + 1 &= -3 \quad | + 3 \\-x^2 + 4 &= 0\end{aligned}$$

Jetzt steht die Gleichung in der Form:

$$\text{Term} = 0$$

Schritt 2: Nach x^n auflösen

Nach dem Vereinfachen sieht man:

$$-x^2 + 4 = 0$$

Es kommt nur eine Potenz von x vor, nämlich x^2 .

Deshalb passt die Lösungsstrategie „Umformen und Wurzel“.

Nun lösen wir nach der Potenz x^2 auf:

$$\begin{aligned}-x^2 + 4 &= 0 \quad | - 4 \\-x^2 &= -4 \quad | : (-1) \\x^2 &= 4\end{aligned}$$

Schritt 3: Wenn nötig und möglich: Wurzel ziehen

Da x^2 eine gerade Potenz ist, ziehen wir die Wurzel und beachten beide Lösungen.

$$\begin{aligned}x^2 &= 4 \quad | \sqrt{} \\x_1 &= 2 \\x_2 &= -2\end{aligned}$$

Schritt 4: Lösungsmenge angeben

$$L = \{-2; 2\}$$

6. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Bevor du abgibst, frage dich:

- Musste ich die Gleichung zuerst vereinfachen oder war sie schon passend?
- Habe ich Klammern aufgelöst?
- Habe ich alles auf eine Seite gebracht?
- Steht die Gleichung in der Form $\text{Term} = 0$?
- Kommt nach dem Vereinfachen nur eine Potenz von x vor?
- Habe ich nach x^n aufgelöst?
- Muss ich eine Wurzel ziehen?
- Ist die Wurzel möglich?
- Gibt es bei gerader Potenz zwei Lösungen oder keine reelle Lösung?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

Erst prüfen, dann nach x^n auflösen

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.1 mitnehmen:

1. Oft muss man die Gleichung zuerst vereinfachen.
2. Diese Strategie passt, wenn nach dem Vereinfachen nur eine Potenz von x vorkommt.
3. Ziel ist die Form $x^n = \text{Zahl}$.
4. Danach ziehst du, wenn nötig und möglich, eine passende Wurzel.
5. Bei geraden Potenzen musst du besonders auf zwei Lösungen oder keine reelle Lösung achten.
6. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Diese Strategie erkennst du oft erst nach dem Vereinfachen.
Wenn dann nur eine Potenz von x vorkommt, kannst du meistens nach x^n auflösen und eine passende Wurzel ziehen.