Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.2: Ausklammern-Methode

Eine Lösungsstrategie für Gleichungen mit gemeinsamem Faktor

In diesem Kapitel lernst du die nächste Lösungsstrategie kennen:

Ausklammern-Methode

Diese Strategie passt, wenn alle Terme einen gemeinsamen Faktor haben.
Nach dem Ausklammern entsteht ein Produkt. Danach kannst du den Satz vom Nullprodukt verwenden.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann kann man ausklammern? **2**

2. Vorarbeit: Gleichung vorbereiten **2**

3. Schema als Hilfestellung **2**

4. Die Schritte **4**

5. Beispiel **5**

6. Fehlerquellen **6**

7. Mini-Checkliste **6**

Zusammenfassung **7**

1. Wann kann man ausklammern?

Ausklammern bedeutet: Du ziehst einen gemeinsamen Faktor vor eine Klammer.
Zum Beispiel:

$$x^3 + 4x^2$$

Beide Terme enthalten x^2.
Deshalb kann man x^2 ausklammern:

$$x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$$

Tipp

Ein wichtiger Hinweis ist: Es gibt kein Absolutglied.
Das bedeutet: Es gibt keine reine Zahl ungleich 0, die ohne x in der Gleichung steht.

Merksatz

Die Ausklammern-Methode passt, wenn alle Terme einen gemeinsamen Faktor haben.
Bei ganzrationalen Gleichungen ist das häufig eine Potenz von x, zum Beispiel x, x^2 oder x^3.

2. Vorarbeit: Gleichung vorbereiten

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

$$\boxed{\text{Erst vorbereiten, dann Methode erkennen}}$$

Bevor du entscheidest, ob Ausklammern passt, musst du die Gleichung manchmal zuerst vorbereiten.
Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass auf der anderen Seite 0 steht

Merksatz

Für die Ausklammern-Methode muss die Gleichung in der Form

$$\boxed{\text{Term} = 0}$$

stehen. Erst dann kannst du den gemeinsamen Faktor ausklammern und danach den Satz vom Nullprodukt anwenden.

3. Schema als Hilfestellung

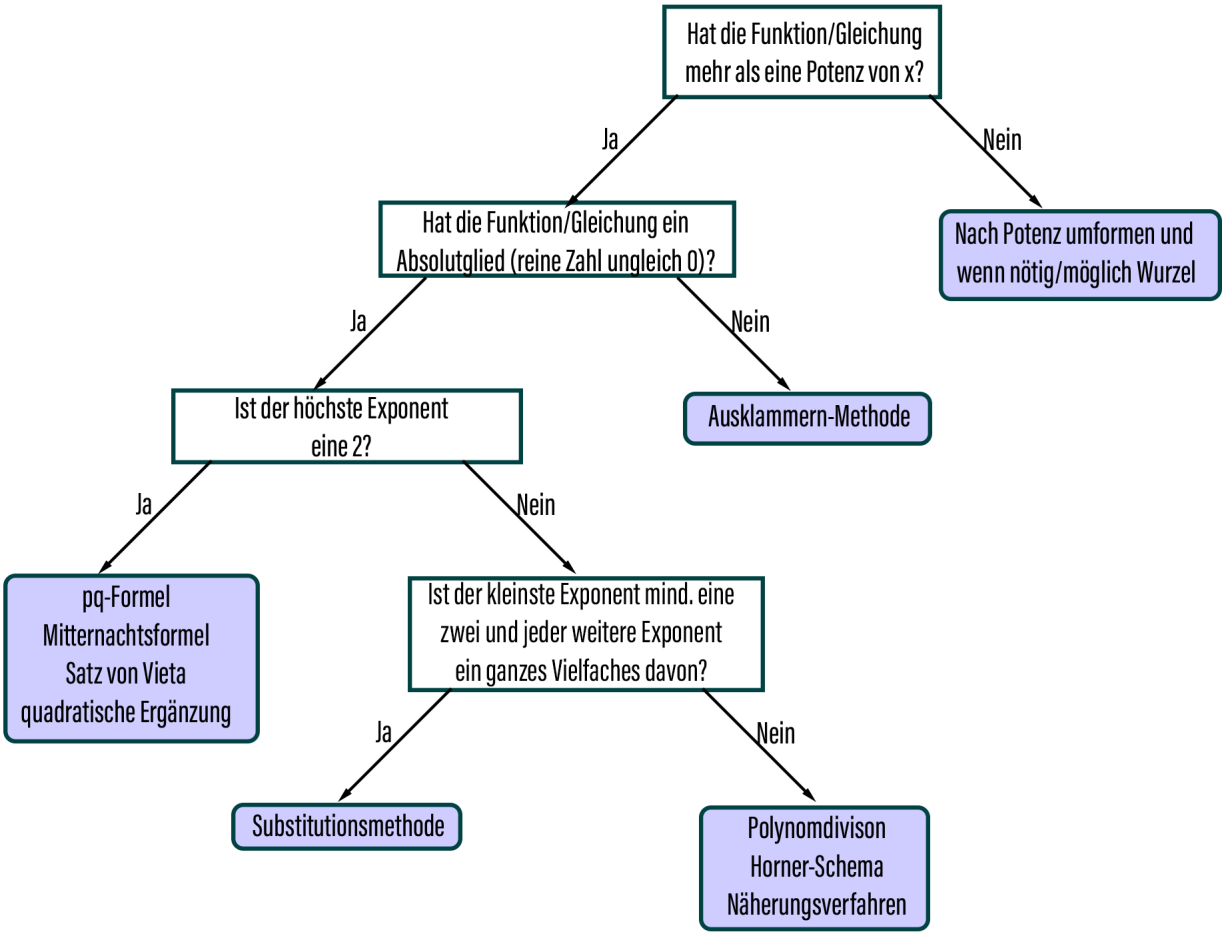
Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.
Für diese Strategie sind besonders diese Fragen wichtig:

$$\boxed{\text{Gibt es kein Absolutglied?}}$$

und:

Haben alle Terme einen gemeinsamen Faktor?

Wenn ja, ist die Ausklammern-Methode ein guter Weg.



Tipp

Das Schema ersetzt nicht die Rechnung.
Es hilft dir nur dabei, die passende Methode zu erkennen.

4. Die Schritte

Merksatz

Die Grundidee dieser Strategie ist:

$\boxed{\text{gemeinsamen Faktor ausklammern}}$

Danach entsteht ein Produkt, das gleich 0 ist. Dann kannst du den Satz vom Nullprodukt verwenden.

1. **Schritt 1: Gleichung vereinfachen**
   Falls nötig: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen und alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht
2. **Schritt 2: Kleinste Potenz von x ausklammern**
   Suche die kleinste Potenz von x, die in allen Termen vorkommt
3. **Schritt 3: Satz vom Nullprodukt anwenden**
   Wenn ein Produkt 0 ergibt, muss mindestens ein Faktor 0 sein:

   $$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0$$

   Setze deshalb jeden Faktor einzeln gleich 0.
4. **Schritt 4: Entstehende Gleichungen lösen, wenn möglich**
   Löse die einzelnen Gleichungen, die durch den Satz vom Nullprodukt entstanden sind
5. **Schritt 5: Lösungsmenge angeben**
   Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

   $$L = \{\ldots\}$$

5. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$-2x^3 + 4x^2 = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Deine Lösung

6. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Durch x teilen

Bei Gleichungen wie

$$2x^3 + x = 0$$

darfst du nicht einfach durch x teilen.
Sonst kann die Lösung $x = 0$ verloren gehen.
Besser ist es, x auszuklammern:

$$2x^3 + x = x(2x^2 + 1)$$

Dann kannst du den Satz vom Nullprodukt verwenden.

Fehlerquelle 2: Satz vom Nullprodukt zu früh verwenden

Der Satz vom Nullprodukt darf erst verwendet werden, wenn wirklich ein Produkt gleich 0 ist.
Nicht passend wäre zum Beispiel:

$$x(x - 3) + 2 = 0$$

Hier steht nicht nur ein Produkt gleich 0, sondern danach noch $+2$.

Fehlerquelle 3: Nicht vollständig ausklammern

Wenn alle Terme x^2 enthalten, solltest du auch x^2 ausklammern und nicht nur x.
So wird die Gleichung einfacher und du erkennst die Lösungen besser.

7. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Bevor du abgibst, frage dich:

- Ist die Gleichung vorbereitet und steht sie in der Form Term $= 0$?
- Gibt es kein Absolutglied?
- Haben alle Terme einen gemeinsamen Faktor?
- Habe ich die kleinste Potenz von x ausgeklammert?
- Steht danach ein Produkt gleich 0?
- Habe ich den Satz vom Nullprodukt angewendet?
- Habe ich die entstandenen Gleichungen gelöst, wenn möglich?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

$\boxed{\text{Ausklammern} \rightarrow \text{SvNP} \rightarrow \text{Lösungsmenge}}$

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.2 mitnehmen:

1. Die Ausklammern-Methode passt immer, wenn alle Terme einen gemeinsamen Faktor haben.
2. Ein wichtiger Hinweis ist: Es gibt kein Absolutglied.
3. Die Gleichung muss für die Ausklammern-Methode in der Form Term $= 0$ stehen.
4. Danach klammerst du die kleinste Potenz von x aus.
5. Anschließend verwendest du den Satz vom Nullprodukt und setzt jeden Faktor einzeln gleich 0.
6. Danach löst du die entstandenen Gleichungen, wenn möglich.
7. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.
8. Teile nicht einfach durch x, weil dadurch die Lösung $x = 0$ verloren gehen kann.

Wichtigster Gedanke

Wenn alle Terme einen gemeinsamen
Faktor haben, klammerst du diesen aus.
Danach entsteht ein Produkt und du kannst
den Satz vom Nullprodukt anwenden.