Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.3: Satz vom Nullprodukt

Eine Lösungsstrategie für Gleichungen, die schon als Produkt vorliegen

In diesem Kapitel lernst du eine der wichtigsten Ideen beim Lösen von Gleichungen kennen:

Satz vom Nullprodukt

Diese Strategie passt, wenn auf einer Seite ein Produkt steht und auf der anderen Seite 0.
Dann kannst du jeden Faktor einzeln gleich 0 setzen.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann kann man den Satz vom Nullprodukt verwenden? **2**

2. Vorarbeit: Gleichung vorbereiten **2**

3. Die Schritte **4**

4. Beispiel **5**

5. Fehlerquellen **6**

6. Mini-Checkliste **7**

Zusammenfassung **7**

1. Wann kann man den Satz vom Nullprodukt verwenden?

Der Satz vom Nullprodukt darf verwendet werden, wenn eine Gleichung diese Form hat:

$$\boxed{\text{Produkt} = 0}$$

Ein Produkt erkennst du daran, dass mehrere Faktoren miteinander multipliziert werden.
Zum Beispiel:

$$x \cdot (x - 3) = 0$$

oder:

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

Merksatz

Der Satz vom Nullprodukt sagt:
Wenn ein Produkt 0 ergibt, dann muss mindestens ein Faktor 0 sein.

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0$$

Tipp

Wichtig ist das Wort Produkt.
Der Satz vom Nullprodukt funktioniert nur, wenn wirklich Faktoren miteinander multipliziert werden und das Produkt gleich 0 ist.

2. Vorarbeit: Gleichung vorbereiten

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

$$\boxed{\text{Erst vorbereiten, dann Methode erkennen}}$$

Bevor du den Satz vom Nullprodukt verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.
Typische Vorarbeit:

- alles auf eine Seite bringen, sodass auf der anderen Seite 0 steht
- prüfen, ob wirklich ein Produkt gleich 0 vorliegt
- Klammern stehen lassen, wenn dadurch schon Faktoren erkennbar sind

Merksatz

Für den Satz vom Nullprodukt muss die Gleichung in der Form

$$\boxed{\text{Faktor} \cdot \text{Faktor} \cdot \ldots = 0}$$

stehen. Erst dann darfst du jeden Faktor einzeln gleich 0 setzen.

Achtung

Schülerfreundlich gesagt:
Jede Addition oder Subtraktion, die du noch siehst, muss innerhalb einer multiplizierten Klammer stehen.
Diese Klammer darf auch potenziert sein.

$$(x-3)^2 = 0$$

ist also erlaubt, weil die Subtraktion in der Klammer steht.

Beispiele und Gegenbeispiele

Gleichung	Ja oder Nein?	Begründung
$x(x-3)=0$	Ja	Ein Produkt steht gleich 0. Die Subtraktion steht in der Klammer.
$(x+2)(x-5)=0$	Ja	Beide Klammern werden miteinander multipliziert.
$(x-3)^2=0$	Ja	Die Klammer ist potenziert. Das zählt als Produkt.
$2(x-1)(x+2)=0$	Ja	Die Zahl 2 ist auch ein Faktor. Sie wird mit den Klammern multipliziert.
$x(x-3)+2=0$	Nein	Nach dem Produkt steht noch $+2$. Deshalb ist es nicht nur ein Produkt gleich 0.
$x^2-9=0$	Nein	Die Subtraktion steht außerhalb. Erst durch Umformen oder Faktorisieren könnte ein Produkt entstehen.
$(x+1)(x-2)-5=0$	Nein	Nach dem Produkt steht noch -5. Der Satz vom Nullprodukt passt nicht direkt.
$x(x+1)(x^2-4)=0$	Ja	Alle Faktoren werden miteinander multipliziert und das Produkt steht gleich 0.

Merksatz

Steht eine Zahl als Faktor vor den Klammern, wird sie beim Satz vom Nullprodukt auch betrachtet.
Wenn diese Zahl aber nicht 0 ist, liefert sie keine Lösung.
Zum Beispiel:

$$2 \cdot (x-1) \cdot (x+2) = 0$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 2 \neq 0 \\ \text{II)} \quad & x-1=0 \\ \text{III)} \quad & x+2=0 \end{aligned}$$

Die Zahl 2 kann nicht 0 werden.
Deshalb entstehen Lösungen nur aus den Klammern.

3. Die Schritte

Merksatz

Die Grundidee dieser Strategie ist:

$$\boxed{\text{Produkt} = 0}$$

Dann setzt du jeden Faktor einzeln gleich 0.

1. **Schritt 1: Gleichung vereinfachen**
   Falls nötig: alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht
2. **Schritt 2: Satz vom Nullprodukt anwenden**
   Prüfen: Steht die Gleichung wirklich als Produkt gleich 0 da?
   Dann jeden Faktor einzeln gleich 0 setzen:

   $$a \cdot b \cdot c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0$$

3. **Schritt 3: Einzelne Gleichungen lösen**
   Löse die Gleichungen, die durch den Satz vom Nullprodukt entstanden sind
4. **Schritt 4: Lösungsmenge angeben**
   Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

   $$L = \{\ldots\}$$

4. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$x \cdot (x-3) \cdot (x^2-16) = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Deine Lösung

5. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Satz vom Nullprodukt anwenden, obwohl kein Produkt vorliegt

Bei einer Gleichung wie

$$x(x-3)+2=0$$

darfst du den Satz vom Nullprodukt nicht direkt anwenden.
Hier steht nicht nur ein Produkt gleich 0, sondern danach noch $+2$.

Fehlerquelle 2: Nicht alle Faktoren gleich 0 setzen

Wenn mehrere Faktoren vorhanden sind, musst du jeden Faktor einzeln betrachten.
Zum Beispiel:

$$x(x-3)(x+5)=0$$

Dann entstehen drei Gleichungen:

$$x=0, \quad x-3=0, \quad x+5=0$$

Fehlerquelle 3: Einen Faktor übersehen

Wenn ein Faktor wie x^2 vorkommt, gehört auch dieser Faktor zum Satz vom Nullprodukt.
Zum Beispiel:

$$x^2(x-4)=0$$

Dann gilt:

$$x^2=0 \quad \text{oder} \quad x-4=0$$

Fehlerquelle 4: Zahl vor der Klammer falsch behandeln

Bei

$$2(x-1)(x+2)=0$$

ist 2 zwar ein Faktor, aber $2 \neq 0$.
Deshalb liefert 2 keine Lösung.

6. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Bevor du abgibst, frage dich:

- Ist die Gleichung vorbereitet und steht rechts 0?
- Steht links wirklich ein Produkt?
- Steht jede Addition oder Subtraktion innerhalb einer multiplizierten Klammer?
- Gibt es noch eine Addition oder Subtraktion außerhalb der Faktoren?
- Habe ich jeden Faktor einzeln gleich 0 gesetzt?
- Habe ich Zahlenfaktoren wie 2 oder -3 richtig behandelt?
- Habe ich alle entstandenen Gleichungen gelöst?
- Habe ich keine Lösung vergessen?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

Gleichung vereinfachen $\rightarrow$ SvNP $\rightarrow$ Lösungsmenge

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.3 mitnehmen:

1. Der Satz vom Nullprodukt passt, wenn ein Produkt gleich 0 ist.
2. Die Gleichung muss in der Form Produkt $= 0$ stehen.
3. Jede sichtbare Addition oder Subtraktion muss innerhalb einer multiplizierten Klammer stehen.
4. Eine Klammer darf auch potenziert sein, zum Beispiel $(x-3)^2 = 0$.
5. Zahlenfaktoren wie 2 oder -3 liefern keine Lösung, wenn sie nicht 0 sind.
6. Danach setzt du jeden Faktor einzeln gleich 0.
7. Anschließend löst du die entstandenen Gleichungen.
8. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Wenn ein Produkt gleich 0 ist, muss mindestens ein Faktor 0 sein.
Darum setzt du beim Satz vom Nullprodukt jeden Faktor einzeln gleich 0.