

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.4: pq-Formel

Eine Lösungsstrategie für quadratische Gleichungen

In diesem Kapitel lernst du die nächste Lösungsstrategie kennen:

pq-Formel

Diese Strategie passt bei quadratischen Gleichungen.

Eine quadratische Gleichung erkennst du daran, dass der höchste Exponent 2 ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann benutzt man die pq-Formel?	2
2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen	2
3. Wenn nötig: Normieren	2
4. Schema als Hilfestellung	3
5. Die pq-Formel	4
6. Die Schritte	5
7. Beispiel	6
8. Fehlerquellen	8
9. Mini-Checkliste	8
Zusammenfassung	9

1. Wann benutzt man die pq-Formel?

Die pq-Formel benutzt man bei quadratischen Gleichungen.
Das bedeutet:

Der höchste Exponent ist 2

Zum Beispiel:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Hier kommt x^2 vor.

Es kommt aber kein x^3 , x^4 oder höherer Exponent vor.

Merksatz

Die pq-Formel passt bei quadratischen Gleichungen in Normalform:

$$x^2 + px + q = 0$$

Vor x^2 muss also eine 1 stehen.

Tipp

Wenn vor x^2 nicht 1 steht, musst du die Gleichung zuerst normieren.
Das bedeutet: Du teilst die ganze Gleichung durch die Zahl vor x^2 .

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

Erst vorbereiten, dann Methode erkennen

Bevor du die pq-Formel verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.
Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht
- prüfen, ob der höchste Exponent 2 ist

Merksatz

Für die pq-Formel muss die Gleichung in dieser Form stehen:

$$x^2 + px + q = 0$$

Erst dann kannst du p und q sicher ablesen.

3. Wenn nötig: Normieren

Die pq-Formel funktioniert nur direkt, wenn vor x^2 eine 1 steht.

Beispiel

Diese Gleichung ist schon normiert:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Diese Gleichung ist noch nicht normiert:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Hier steht vor x^2 die Zahl 2.

Deshalb müsste man zuerst durch 2 teilen.

Achtung

Wenn du vergisst zu normieren, liest du p und q falsch ab.
Deshalb immer zuerst prüfen:

Steht vor x^2 wirklich eine 1?

4. Schema als Hilfestellung

Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.

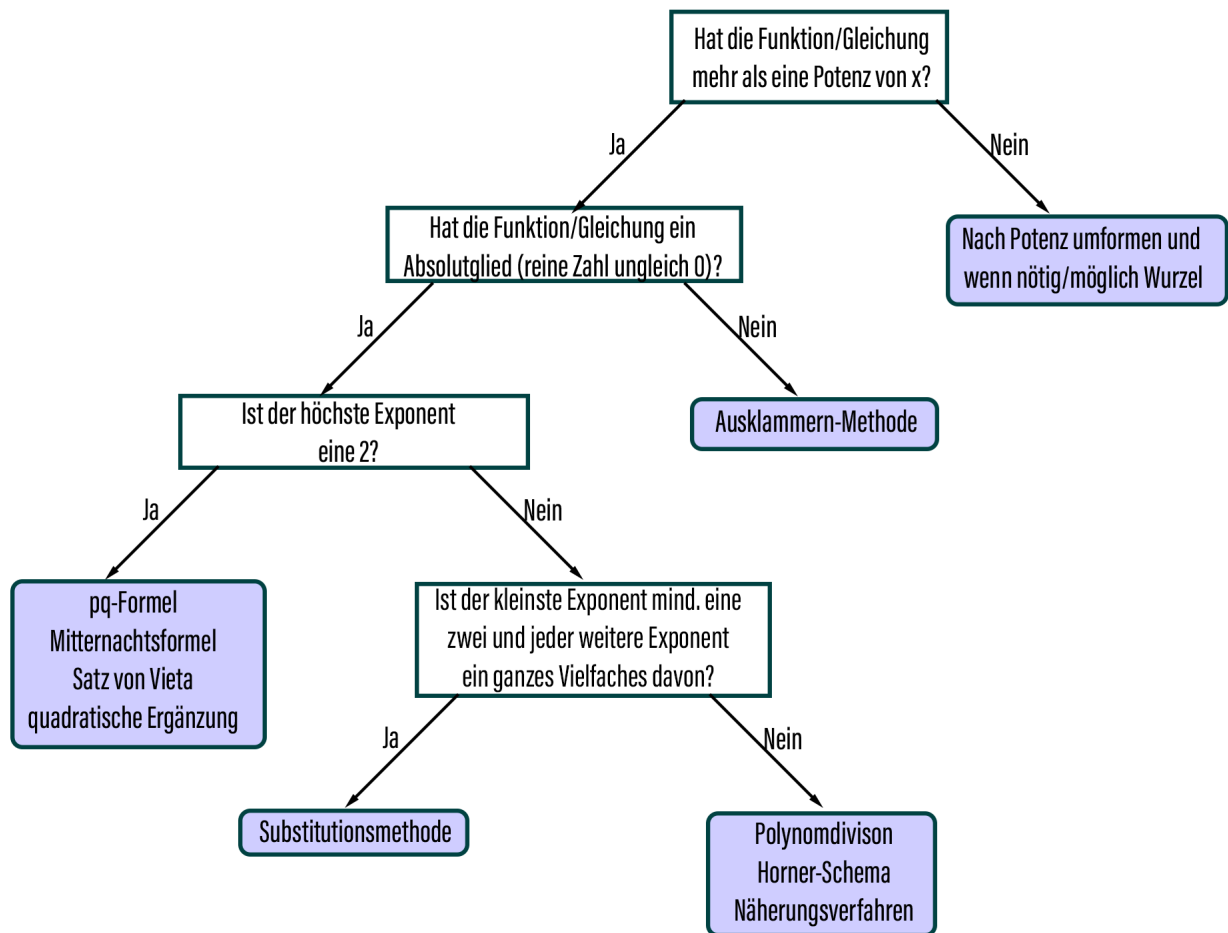
Für die pq-Formel sind vor allem diese Fragen wichtig:

- Ist der höchste Exponent 2?
- Gibt es ein Absolutglied?
- Muss man zuerst vereinfachen?
- Muss man noch normieren?

Wenn du am Ende bei einer quadratischen Gleichung landest, die in die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

gebracht werden kann, passt die pq-Formel.



5. Die pq-Formel

Wenn die Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

steht, darfst du die pq-Formel verwenden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Merksatz

Bei der pq-Formel liest du aus der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

die Werte p und q ab.

Danach setzt du sie in die Formel ein.

Tipp

Achte besonders auf Vorzeichen.

Wenn dort zum Beispiel

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

steht, dann ist:

$$p = -4 \quad \text{und} \quad q = 3$$

6. Die Schritte

1. Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Klammern auflösen, Terme zusammenfassen und alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht

2. Schritt 2: Wenn nötig normieren

Prüfen, ob vor x^2 eine 1 steht. Falls nicht: durch den Faktor vor x^2 teilen

3. Schritt 3: p und q bestimmen

Aus der Normalform ablesen:

$$x^2 + px + q = 0$$

4. Schritt 4: In Formel einsetzen und vereinfachen

Die Werte in die pq-Formel einsetzen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

5. Schritt 5: Lösungsmenge angeben

Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

$$L = \{\dots\}$$

7. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Ausgefüllte Lösung

Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Die Gleichung steht schon auf 0:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Außerdem ist der höchste Exponent 2.

Deshalb handelt es sich um eine quadratische Gleichung.

Schritt 2: Wenn nötig normieren

Vor x^2 steht noch die Zahl 2.

Für die pq-Formel muss vor x^2 aber eine 1 stehen.

Deshalb teilen wir die ganze Gleichung durch 2.

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Jetzt steht die Gleichung in der Normalform:

$$x^2 + px + q = 0$$

Schritt 3: p und q bestimmen

Wir vergleichen:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Also gilt:

$$p = -4 \quad \text{und} \quad q = 3$$

Schritt 4: In Formel einsetzen und vereinfachen

Die pq-Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen $p = -4$ und $q = 3$ ein:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\&= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} \\&= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\&= 2 \pm \sqrt{1} \\&= 2 \pm 1\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 2 + 1 = 3$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1$$

Schritt 5: Lösungsmenge angeben

Wir sortieren die Lösungen der Größe nach:

$$L = \{1; 3\}$$

8. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Nicht normieren

Bei

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

darfst du p und q nicht direkt ablesen.
Du musst zuerst durch 2 teilen.

Fehlerquelle 2: Vorzeichen falsch ablesen

Bei

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ist

$$p = -4 \quad \text{und} \quad q = 3$$

Das Minuszeichen gehört zu p .

Fehlerquelle 3: Das Minus vor $-\frac{p}{2}$ vergessen

Die Formel beginnt mit:

$$-\frac{p}{2}$$

Wenn p negativ ist, wird daraus ein Plus.

Fehlerquelle 4: Wurzel aus negativer Zahl

Wenn unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung.

9. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Prüfe deine Lösung mit diesen Fragen:

- Steht die Gleichung rechts auf 0?
- Ist der höchste Exponent 2?
- Steht vor x^2 eine 1?
- Falls nicht: Habe ich normiert?
- Habe ich p mit richtigem Vorzeichen abgelesen?
- Habe ich q mit richtigem Vorzeichen abgelesen?
- Habe ich korrekt in die pq-Formel eingesetzt?
- Habe ich die Wurzel richtig vereinfacht?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

vereinfachen $\rightarrow$ normieren $\rightarrow p, q \rightarrow$ Formel

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.4 mitnehmen:

1. Die pq-Formel passt bei quadratischen Gleichungen.
2. Die Gleichung muss in der Form $x^2 + px + q = 0$ stehen.
3. Wenn vor x^2 nicht 1 steht, musst du zuerst normieren.
4. Danach liest du p und q mit Vorzeichen ab.
5. Dann setzt du in die pq-Formel ein:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

6. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Die pq-Formel funktioniert erst, wenn die Gleichung in der Normalform steht.
Dann liest du p und q ab und setzt sie in die Formel ein.