Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.5: Mitternachtsformel

Eine Lösungsstrategie für quadratische Gleichungen

In diesem Kapitel lernst du eine weitere Lösungsstrategie kennen:

Mitternachtsformel

Diese Strategie passt bei quadratischen Gleichungen.
Eine quadratische Gleichung erkennst du daran, dass der höchste Exponent 2 ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann benutzt man die Mitternachtsformel? **2**

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen **2**

3. Schema als Hilfestellung **2**

4. a, b und c bestimmen **3**

5. Die Mitternachtsformel **4**

6. Die Schritte **4**

7. Beispiel **6**

8. Fehlerquellen **8**

9. Mini-Checkliste **8**

Zusammenfassung **9**

1. Wann benutzt man die Mitternachtsformel?

Die Mitternachtsformel benutzt man bei quadratischen Gleichungen.
Das bedeutet:

$$\boxed{\text{Der höchste Exponent ist } 2}$$

Zum Beispiel:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Hier ist der höchste Exponent 2.
Deshalb ist die Gleichung quadratisch.

Merksatz

Die Mitternachtsformel passt bei Gleichungen der Form

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a \neq 0}$$

Dann liest du a, b und c ab und setzt sie in die Formel ein.

Tipp

Im Unterschied zur pq-Formel musst du hier nicht normieren.
Die Mitternachtsformel funktioniert direkt mit a, b und c.

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

$$\boxed{\text{Erst vorbereiten, dann Methode erkennen}}$$

Bevor du die Mitternachtsformel verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.
Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht
- prüfen, ob der höchste Exponent 2 ist

Merksatz

Für die Mitternachtsformel muss die Gleichung in dieser Form stehen:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Erst dann kannst du a, b und c sicher ablesen.

3. Schema als Hilfestellung

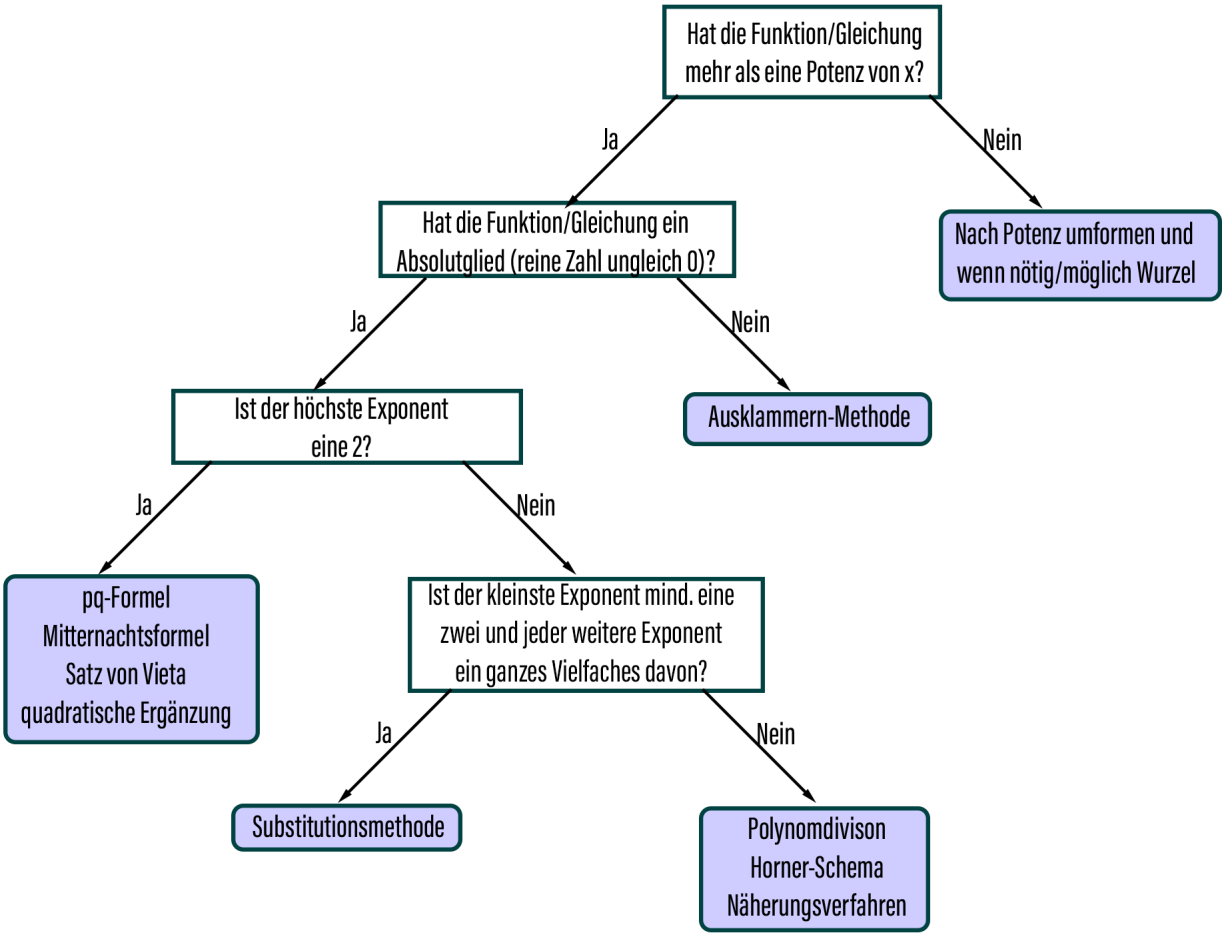
Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.
Für die Mitternachtsformel sind vor allem diese Fragen wichtig:

- Ist der höchste Exponent 2?
- Liegt eine quadratische Gleichung vor?
- Muss man zuerst vereinfachen?
- Kann man a, b und c ablesen?

Wenn du am Ende bei einer Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

landest, kannst du die Mitternachtsformel verwenden.



4. a, b und c bestimmen

Wenn die Gleichung in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

steht, kannst du die drei Werte direkt ablesen.

Beispiel

Bei der Gleichung

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

gilt:

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 2$$

Tipp

Achte besonders auf Vorzeichen.
Wenn dort zum Beispiel

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

steht, dann ist:

$$a = 3, \quad b = -4, \quad c = -7$$

5. Die Mitternachtsformel

Wenn die Gleichung in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

steht, darfst du die Mitternachtsformel verwenden:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Merksatz

Du liest zuerst a, b und c ab.
Danach setzt du sie in die Formel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Achtung

Unter der Wurzel steht

$$b^2 - 4ac$$

Hier passieren besonders oft Vorzeichenfehler.
Setze deshalb sorgfältig ein.

6. Die Schritte

1. **Schritt 1: Gleichung vereinfachen**
   Klammern auflösen, Terme zusammenfassen und alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht

2. **Schritt 2: a, b und c bestimmen**
   Aus der Form

   $$ax^2 + bx + c = 0$$

   die drei Werte ablesen

3. **Schritt 3: In Formel einsetzen und vereinfachen**
   Die Werte in die Mitternachtsformel einsetzen:

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. **Schritt 4: Lösungsmenge angeben**
   Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

   $$L = \{\ldots\}$$

7. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$2(x^2+4)-7=5x-1$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Ausgefüllte Lösung

Schritt 1: Gleichung vereinfachen
Zuerst lösen wir die Klammer auf und fassen zusammen.

$$\begin{aligned} 2(x^2+4)-7 &= 5x-1 \\ 2x^2+8-7 &= 5x-1 \\ 2x^2+1 &= 5x-1 \end{aligned}$$

Jetzt bringen wir alles auf eine Seite, sodass rechts 0 steht.

$$\begin{aligned} 2x^2+1 &= 5x-1 \quad |-5x \\ 2x^2-5x+1 &= -1 \quad |+1 \\ 2x^2-5x+2 &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt steht die Gleichung in der passenden Form:

$$ax^2+bx+c=0$$

Schritt 2: a, b und c bestimmen
Wir vergleichen:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ 2x^2-5x+2 &= 0 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\boxed{a=2, \quad b=-5, \quad c=2}$$

Schritt 3: In Formel einsetzen und vereinfachen
Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Wir setzen $a=2$, $b=-5$ und $c=2$ ein.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{5\pm 3}{4} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5+3}{4} \\ &= \frac{8}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5-3}{4} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Schritt 4: Lösungsmenge angeben
Wir sortieren die Lösungen der Größe nach:

$$\boxed{L = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}}$$

8. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Nicht auf 0 bringen
Die Gleichung muss zuerst so umgeformt werden, dass rechts 0 steht.

Fehlerquelle 2: a, b und c falsch ablesen
Bei

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

ist

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 2$$

Das Minuszeichen gehört zu b.

Fehlerquelle 3: Vorzeichenfehler unter der Wurzel
Unter der Wurzel steht:

$$b^2 - 4ac$$

Hier muss genau eingesetzt werden.

Fehlerquelle 4: Den Nenner $2a$ vergessen
Unten steht immer $2a$, nicht nur 2.

Fehlerquelle 5: Wurzel aus negativer Zahl
Wenn unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung.

9. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Prüfe deine Lösung mit diesen Fragen:

- Steht die Gleichung rechts auf 0?
- Ist der höchste Exponent 2?
- Habe ich a, b und c richtig mit Vorzeichen abgelesen?
- Habe ich korrekt in die Mitternachtsformel eingesetzt?
- Habe ich $b^2 - 4ac$ richtig berechnet?
- Habe ich den Nenner $2a$ beachtet?
- Habe ich die Wurzel richtig vereinfacht?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

$$\boxed{\text{vereinfachen} \to a, b, c \to \text{Formel} \to \text{Lösungsmenge}}$$

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.5 mitnehmen:

1. Die Mitternachtsformel passt bei quadratischen Gleichungen.
2. Die Gleichung muss in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ stehen.
3. Dann liest du a, b und c mit Vorzeichen ab.
4. Danach setzt du in die Mitternachtsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Unter der Wurzel steht immer $b^2 - 4ac$.
6. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Die Mitternachtsformel funktioniert bei quadratischen Gleichungen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$.
Dann liest du a, b und c ab und setzt sie in die Formel ein.