

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.5: Mitternachtsformel

Eine Lösungsstrategie für quadratische Gleichungen

In diesem Kapitel lernst du eine weitere Lösungsstrategie kennen:

Mitternachtsformel

Diese Strategie passt bei quadratischen Gleichungen.

Eine quadratische Gleichung erkennst du daran, dass der höchste Exponent 2 ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann benutzt man die Mitternachtsformel?	2
2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen	2
3. Schema als Hilfestellung	2
4. a , b und c bestimmen	3
5. Die Mitternachtsformel	4
6. Die Schritte	4
7. Beispiel	6
8. Fehlerquellen	7
9. Mini-Checkliste	7
Zusammenfassung	8

1. Wann benutzt man die Mitternachtsformel?

Die Mitternachtsformel benutzt man bei quadratischen Gleichungen.
Das bedeutet:

Der höchste Exponent ist 2

Zum Beispiel:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Hier ist der höchste Exponent 2.
Deshalb ist die Gleichung quadratisch.

Merksatz

Die Mitternachtsformel passt bei Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a \neq 0$$

Dann liest du a , b und c ab und setzt sie in die Formel ein.

Tipp

Im Unterschied zur pq-Formel musst du hier nicht normieren.
Die Mitternachtsformel funktioniert direkt mit a , b und c .

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

Erst vorbereiten, dann Methode erkennen

Bevor du die Mitternachtsformel verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.
Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht
- prüfen, ob der höchste Exponent 2 ist

Merksatz

Für die Mitternachtsformel muss die Gleichung in dieser Form stehen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Erst dann kannst du a , b und c sicher ablesen.

3. Schema als Hilfestellung

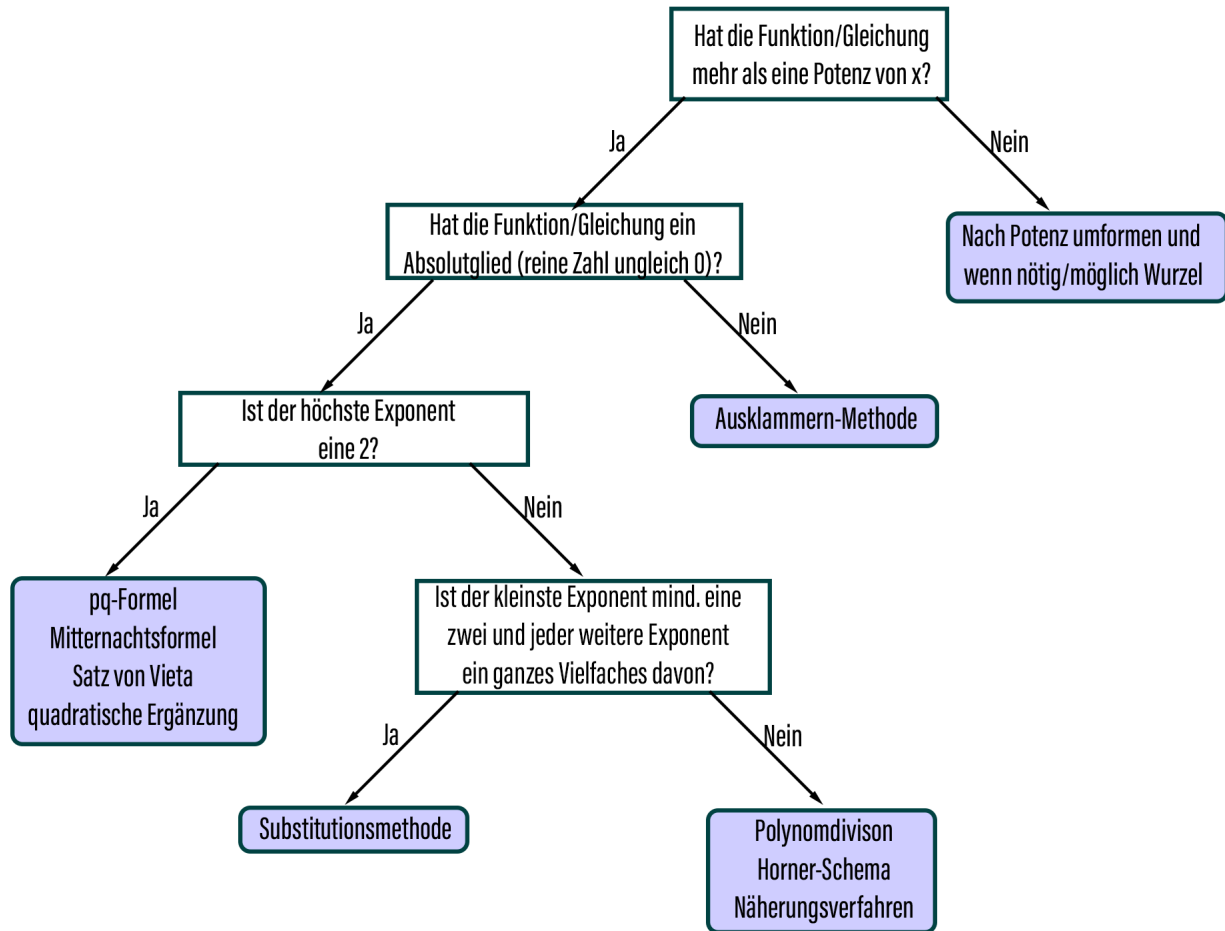
Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.
Für die Mitternachtsformel sind vor allem diese Fragen wichtig:

- Ist der höchste Exponent 2?
- Liegt eine quadratische Gleichung vor?
- Muss man zuerst vereinfachen?
- Kann man a , b und c ablesen?

Wenn du am Ende bei einer Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

landest, kannst du die Mitternachtsformel verwenden.



4. a , b und c bestimmen

Wenn die Gleichung in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

steht, kannst du die drei Werte direkt ablesen.

Beispiel

Bei der Gleichung

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

gilt:

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 2$$

Tipp

Achte besonders auf Vorzeichen.
Wenn dort zum Beispiel

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

steht, dann ist:

$$a = 3, \quad b = -4, \quad c = -7$$

5. Die Mitternachtsformel

Wenn die Gleichung in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

steht, darfst du die Mitternachtsformel verwenden:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Merksatz

Du liest zuerst a , b und c ab.
Danach setzt du sie in die Formel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Achtung

Unter der Wurzel steht

$$b^2 - 4ac$$

Hier passieren besonders oft Vorzeichenfehler.
Setze deshalb sorgfältig ein.

6. Die Schritte

1. Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Klammern auflösen, Terme zusammenfassen und alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht

2. Schritt 2: a , b und c bestimmen

Aus der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

die drei Werte ablesen

3. Schritt 3: In Formel einsetzen und vereinfachen

Die Werte in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Schritt 4: Lösungsmenge angeben

Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

$$L = \{ \dots \}$$

7. Beispiel

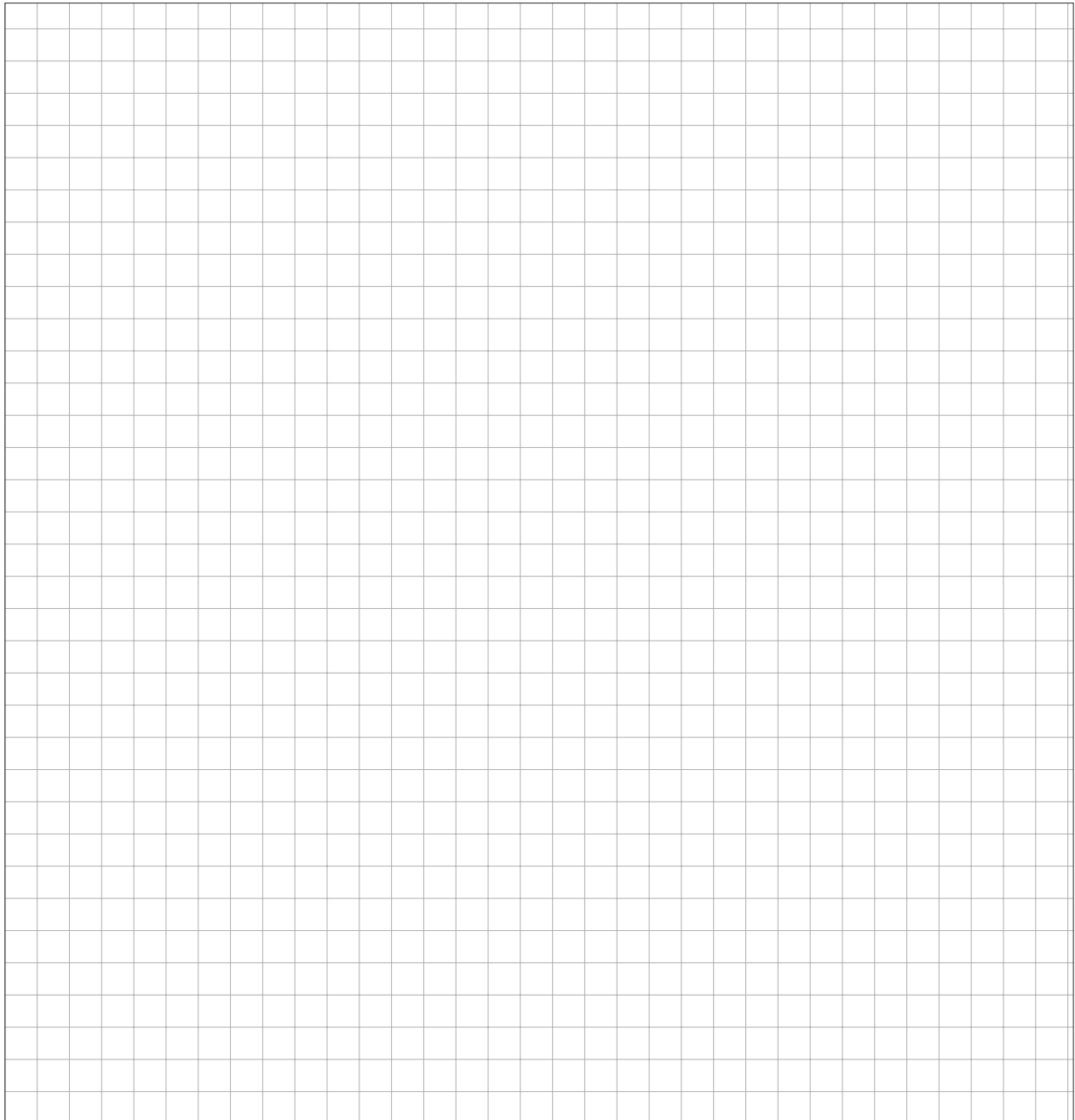
Aufgabe

Löse die Gleichung

$$2(x^2 + 4) - 7 = 5x - 1$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Deine Lösung



8. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Nicht auf 0 bringen

Die Gleichung muss zuerst so umgeformt werden, dass rechts 0 steht.

Fehlerquelle 2: a , b und c falsch ablesen

Bei

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

ist

$$a = 2, \quad b = -5, \quad c = 2$$

Das Minuszeichen gehört zu b .

Fehlerquelle 3: Vorzeichenfehler unter der Wurzel

Unter der Wurzel steht:

$$b^2 - 4ac$$

Hier muss genau eingesetzt werden.

Fehlerquelle 4: Den Nenner $2a$ vergessen

Unten steht immer $2a$, nicht nur 2.

Fehlerquelle 5: Wurzel aus negativer Zahl

Wenn unter der Wurzel eine negative Zahl steht, gibt es keine reelle Lösung.

9. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Prüfe deine Lösung mit diesen Fragen:

- Steht die Gleichung rechts auf 0?
- Ist der höchste Exponent 2?
- Habe ich a , b und c richtig mit Vorzeichen abgelesen?
- Habe ich korrekt in die Mitternachtsformel eingesetzt?
- Habe ich $b^2 - 4ac$ richtig berechnet?
- Habe ich den Nenner $2a$ beachtet?
- Habe ich die Wurzel richtig vereinfacht?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

vereinfachen $\rightarrow a, b, c \rightarrow$ Formel $\rightarrow$ Lösungsmenge

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.5 mitnehmen:

1. Die Mitternachtsformel passt bei quadratischen Gleichungen.
2. Die Gleichung muss in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ stehen.
3. Dann liest du a , b und c mit Vorzeichen ab.
4. Danach setzt du in die Mitternachtsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. Unter der Wurzel steht immer $b^2 - 4ac$.
6. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Die Mitternachtsformel funktioniert bei quadratischen Gleichungen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$.
Dann liest du a , b und c ab und setzt sie in die Formel ein.