

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.6: Substitutionsmethode

Eine Lösungsstrategie für Gleichungen mit passenden Potenzen

In diesem Kapitel lernst du die nächste Lösungsstrategie kennen:

Substitutionsmethode

Diese Strategie passt häufig, wenn mehrere Potenzen von x vorkommen, die gut zusammenpassen. Du ersetzt dann eine Potenz durch eine neue Variable, meistens z . Dadurch entsteht eine einfachere Gleichung.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann benutzt man die Substitutionsmethode?	2
2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen	2
3. Schema als Hilfestellung	3
4. Was bedeutet kleinste Potenz = z ?	3
5. Die Schritte	4
6. Beispiel	5
7. Fehlerquellen	7
8. Mini-Checkliste	7
Zusammenfassung	8

1. Wann benutzt man die Substitutionsmethode?

Die Substitutionsmethode benutzt man oft bei Gleichungen, in denen mehrere Potenzen von x vorkommen. Typisch ist zum Beispiel:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Hier kommen x^4 und x^2 vor.

Das passt gut zusammen, denn:

$$x^4 = (x^2)^2$$

Deshalb kann man x^2 durch z ersetzen.

Merksatz

Die Substitutionsmethode passt oft, wenn die Exponenten zusammenpassen.

Typisch ist:

$$x^4, x^2$$

Dann setzt man meistens:

$$z = x^2$$

Tipp

Das Wort Substitution bedeutet: ersetzen.

Du ersetzt also einen komplizierteren Ausdruck durch eine neue Variable.

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

Erst vorbereiten, dann Methode erkennen

Bevor du die Substitutionsmethode verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.

Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht
- prüfen, welche Potenzen von x vorkommen

Merksatz

Bei ganzrationalen Gleichungen ist eine wichtige Grundform:

Term = 0

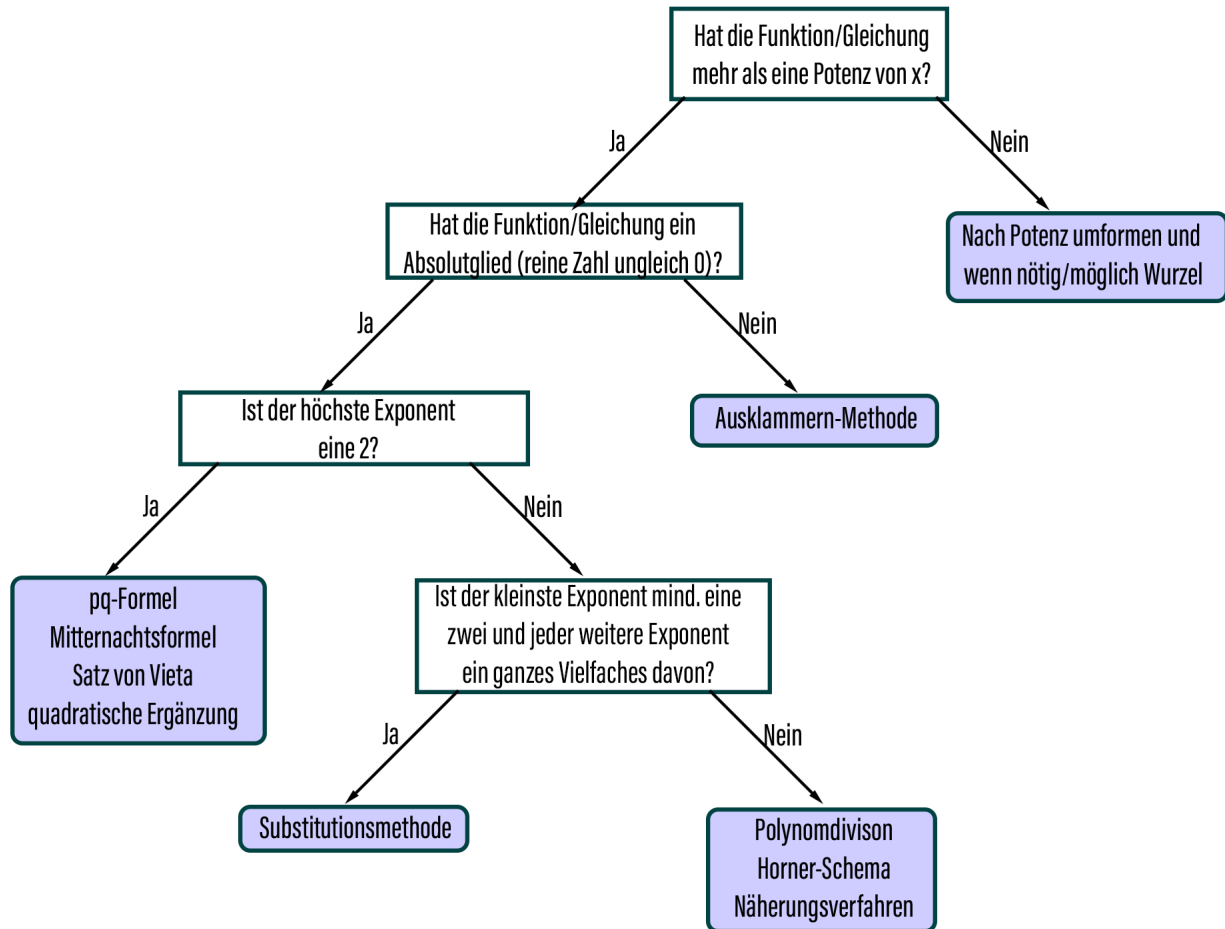
Erst danach kannst du gut erkennen, ob die Exponenten zur Substitutionsmethode passen.

3. Schema als Hilfestellung

Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen.
Für die Substitutionsmethode sind vor allem diese Fragen wichtig:

- Kommen mehrere Potenzen von x vor?
- Ist der kleinste Exponent mindestens 2?
- Sind die weiteren Exponenten Vielfache davon?
- Kann man die kleinste Potenz durch z ersetzen?

Wenn die Potenzen gut zusammenpassen, kannst du häufig substituieren.



4. Was bedeutet kleinste Potenz = z ?

Bei der Substitution ersetzt du die kleinste passende Potenz durch z .
Zum Beispiel:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Die kleinste vorkommende Potenz ist:

$$x^2$$

Deshalb setzt man:

$$z = x^2$$

Dann gilt automatisch:

$$z^2 = (x^2)^2 = x^4$$

Beispiel

Aus

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

wird mit $z = x^2$:

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Jetzt ist die Gleichung einfacher, weil nur noch z vorkommt.

Achtung

Nach dem Lösen der neuen Gleichung bist du noch nicht fertig.

Am Ende musst du wieder zurück zu x .

Wenn du $z = x^2$ gesetzt hast, musst du später also wieder $x^2 = z$ lösen.

5. Die Schritte

1. Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Falls nötig: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen und alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht

2. Schritt 2: Kleinste Potenz = z

Die kleinste passende Potenz durch z ersetzen, zum Beispiel:

$$z = x^2$$

3. Schritt 3: Neue Gleichung lösen

Die entstandene Gleichung in z lösen

4. Schritt 4: $z =$ kleinste Potenz

Die gefundenen z -Werte wieder zurück einsetzen, zum Beispiel:

$$x^2 = z$$

5. Schritt 5: Wenn möglich: Wurzel ziehen

Die Gleichungen in x lösen und prüfen, ob reelle Lösungen möglich sind

6. Schritt 6: Lösungsmenge angeben

Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

$$L = \{\dots\}$$

6. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Ausgefüllte Lösung

Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Die Gleichung steht bereits in der passenden Form:

$$\text{Term} = 0$$

Denn rechts steht schon 0:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Außerdem kommen die Potenzen x^4 und x^2 vor.
Das passt zur Substitutionsmethode, denn:

$$x^4 = (x^2)^2$$

Schritt 2: Kleinste Potenz = z

Die kleinste passende Potenz ist:

$$x^2$$

Deshalb setzen wir:

$$z = x^2$$

Dann gilt automatisch:

$$z^2 = (x^2)^2 = x^4$$

Nun ersetzen wir in der Gleichung:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Schritt 3: Neue Gleichung lösen

Jetzt lösen wir die neue Gleichung in z :

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Diese Gleichung können wir mit der pq-Formel lösen.

$$p = -5$$

$$q = 4$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 4} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4 \\ z_2 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

Schritt 4: $z =$ kleinste Potenz

Am Anfang haben wir gesetzt:

$$z = x^2$$

Deshalb müssen wir jetzt rücksostituieren:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad x^2 &= 4 \\ \text{II)} \quad x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Schritt 5: Wenn möglich: Wurzel ziehen

Jetzt lösen wir beide Gleichungen in x .

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad x^2 &= 4 \quad |\sqrt{} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad x^2 &= 1 \quad |\sqrt{} \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Schritt 6: Lösungsmenge angeben

Wir sortieren die Lösungen der Größe nach:

$$L = \{-2; -1; 1; 2\}$$

7. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Rücksubstitution vergessen

Wenn du z gelöst hast, bist du noch nicht fertig.
Du musst wieder zu x zurück.

Fehlerquelle 2: z und x verwechseln

Wenn du

$$z = x^2$$

gesetzt hast, dann ist z nicht direkt die Lösung für x .

Fehlerquelle 3: Negative z -Werte falsch behandeln

Wenn nach der Rücksubstitution zum Beispiel

$$x^2 = -4$$

entsteht, gibt es dafür keine reelle Lösung.

Fehlerquelle 4: Bei gerader Potenz nur eine Lösung aufschreiben

Aus

$$x^2 = 4$$

folgen zwei Lösungen:

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = -2$$

8. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Prüfe deine Lösung mit diesen Fragen:

- Steht die Gleichung rechts auf 0?
- Passen die Exponenten zur Substitutionsmethode?
- Habe ich die kleinste passende Potenz durch z ersetzt?
- Habe ich auch die höhere Potenz richtig in z umgeschrieben?
- Habe ich die neue Gleichung in z gelöst?
- Habe ich die Rücksubstitution gemacht?
- Habe ich geprüft, ob die Wurzel möglich ist?
- Habe ich bei gerader Potenz beide Lösungen beachtet?
- Habe ich die Lösungsmenge sauber aufgeschrieben?

vereinfachen $\rightarrow z \rightarrow$ lösen $\rightarrow$ zurück zu x

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.6 mitnehmen:

1. Die Substitutionsmethode passt oft, wenn mehrere passende Potenzen von x vorkommen.
2. Typisch ist zum Beispiel x^4 und x^2 .
3. Dann setzt du häufig $z = x^2$.
4. Dadurch entsteht eine einfachere Gleichung in z .
5. Nach dem Lösen musst du wieder zurück zu x .
6. Bei geraden Potenzen musst du auf zwei Lösungen oder keine reelle Lösung achten.
7. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Bei der Substitution ersetzt du eine Potenz durch z .
Nach dem Lösen musst du aber immer wieder zurück zu x .