

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.7: Polynomdivision

Eine Lösungsstrategie für höhere ganzrationale Gleichungen

In diesem Kapitel lernst du die nächste Lösungsstrategie kennen:

Polynomdivision

Diese Strategie benutzt man oft, wenn eine ganzrationale Gleichung einen höheren Exponenten hat und man schon eine erste Lösung gefunden hat.

Mit der Polynomdivision senkst du dann den Grad der Gleichung und kannst die restlichen Lösungen leichter bestimmen.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann benutzt man die Polynomdivision?	2
2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen	2
3. Lösung finden: Teiler des Absolutgliedes	2
4. Fehlende Potenzen ergänzen	3
5. Schema als Hilfestellung	3
6. Die Schritte	4
7. Beispiel	6
8. Fehlerquellen	9
9. Mini-Checkliste	9
Zusammenfassung	10

1. Wann benutzt man die Polynomdivision?

Die Polynomdivision benutzt man häufig bei ganzrationalen Gleichungen wie zum Beispiel:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Hier ist der höchste Exponent 3.

Deshalb reicht die pq-Formel oder Mitternachtsformel nicht direkt aus.

Wenn du aber schon eine Lösung der Gleichung kennst, kannst du den zugehörigen Linearfaktor abspalten. Genau dafür ist die Polynomdivision da.

Merksatz

Die Polynomdivision passt oft, wenn

- der Exponent höher als 2 ist und
- du bereits eine erste Lösung gefunden hast

Dann kannst du die Gleichung vereinfachen und den Grad senken.

Tipp

Wenn du eine Lösung $x = a$ gefunden hast, gehört meistens der Faktor

$$x - a$$

dazu.

Mit diesem Faktor teilst du dann das Polynom.

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

Erst vorbereiten, dann Methode erkennen

Bevor du die Polynomdivision verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.

Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht

Merksatz

Auch bei der Polynomdivision ist die wichtige Grundform:

Term = 0

Erst dann kannst du sinnvoll nach Lösungen suchen.

3. Lösung finden: Teiler des Absolutgliedes

Bevor du die Polynomdivision starten kannst, brauchst du meistens zuerst eine Lösung.

Ein wichtiger Hinweis dafür sind die **Teiler des Absolutgliedes**.

Das Absolutglied ist die reine Zahl ohne x .

Zum Beispiel bei

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

ist das Absolutglied:

6

Die Teiler von 6 sind:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Diese Zahlen probiert man dann als mögliche Lösungen aus.

Merksatz

Bei vielen Schulaufgaben mit Leitkoeffizient 1 findest du eine ganzzahlige Lösung oft unter den Teilern des Absolutgliedes.

Beispiel

Bei

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

probierst du zum Beispiel zuerst:

$$x = 1, x = -1, x = 2, x = -2, \dots$$

4. Fehlende Potenzen ergänzen

Für die Polynomdivision ist es sehr wichtig, dass **alle Potenzen der Reihe nach** vorhanden sind. Fehlt eine Potenz, musst du sie mit dem Koeffizienten 0 ergänzen.

Beispiel

Die Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

enthält kein x^2 .

Für die Polynomdivision schreibst du deshalb:

$$x^3 + 0x^2 - 7x + 6 = 0$$

Achtung

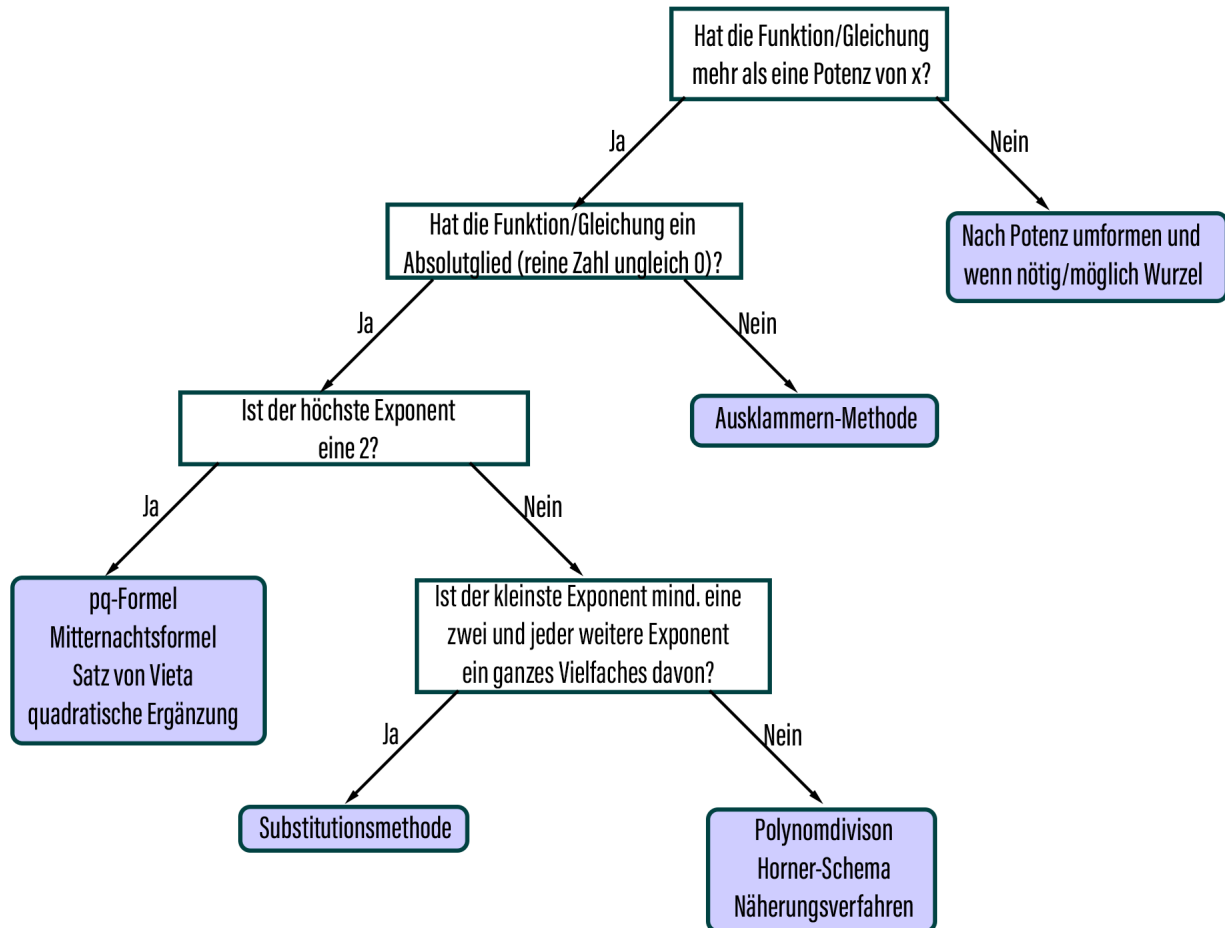
Wenn du fehlende Potenzen nicht ergänzt, verrutschen bei der Polynomdivision die Koeffizienten. Dann wird die ganze Rechnung falsch.

5. Schema als Hilfestellung

Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen. Für die Polynomdivision sind vor allem diese Fragen wichtig:

- Liegt eine ganzrationale Gleichung mit höherem Exponenten vor?
- Kann man eine erste Lösung finden?
- Sind die Teiler des Absolutgliedes hilfreich?
- Fehlen Potenzen, die vorher ergänzt werden müssen?

Wenn du eine erste Lösung gefunden hast, kannst du mit der Polynomdivision weitermachen.



6. Die Schritte

1. Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Falls nötig: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen, alles auf eine Seite bringen und fehlende Potenzen ergänzen

2. Schritt 2: Lösung finden

Mit einer Probe nach einer ersten Lösung suchen, oft mithilfe der Teiler des Absolutgliedes

3. Schritt 3: Polynomdivision

Das Polynom durch den passenden Faktor teilen, zum Beispiel durch

$$x - 1$$

4. Schritt 4: Ergebnis = 0

Den erhaltenen Quotienten wieder gleich 0 setzen

5. Schritt 5: Neue Gleichung lösen

Die neue, einfachere Gleichung lösen

6. Schritt 6: Lösungsmenge

Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

$$L = \{\dots\}$$

7. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Ausgefüllte Lösung

Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Die Gleichung steht bereits auf 0:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Für die Polynomdivision müssen alle Potenzen der Reihe nach vorkommen.
Hier fehlt der x^2 -Term. Deshalb ergänzen wir ihn mit $0x^2$:

$$x^3 + 0x^2 - 7x + 6 = 0$$

Schritt 2: Lösung finden

Wir suchen zuerst eine einfache Lösung.
Dafür schauen wir auf die Teiler des Absolutgliedes.
Das Absolutglied ist:

$$6$$

Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Wir testen $x = 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 0 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 &= 1 + 0 - 7 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $x_1 = 1$ eine Lösung.

Merksatz

Wenn $x = 1$ eine Lösung ist, gehört dazu der Faktor

$$x - 1$$

Deshalb teilen wir jetzt durch $x - 1$.

Schritt 3: Polynomdivision

Wir teilen:

$$(x^3 + 0x^2 - 7x + 6) : (x - 1)$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 0x^2 - 7x + 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 x^2 - 7x \\
 \underline{-(x^2 - x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Das Ergebnis der Polynomdivision ist also:

$$x^2 + x - 6$$

Schritt 4: Ergebnis = 0

Jetzt setzen wir das Ergebnis wieder gleich 0:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Schritt 5: Neue Gleichung lösen

Die neue Gleichung ist quadratisch.

Wir lösen sie mit der pq-Formel.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Also gilt:

$$p = 1, \quad q = -6$$

$$\begin{aligned}
 x_{2,3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} \\
 &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\
 &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\
 &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
 &= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \\
 &= \frac{4}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \\
 &= -\frac{6}{2} \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

Schritt 6: Lösungsmenge

Wir haben insgesamt drei Lösungen gefunden:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3$$

Wir sortieren sie der Größe nach:

$$L = \{-3; 1; 2\}$$

8. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Fehlende Potenzen nicht ergänzen

Bei

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

musst du für die Polynomdivision zuerst schreiben:

$$x^3 + 0x^2 - 7x + 6 = 0$$

Fehlerquelle 2: Eine falsche Lösung testen

Nicht jede getestete Zahl ist wirklich eine Lösung.

Nur wenn beim Einsetzen 0 herauskommt, darfst du mit dieser Zahl weitermachen.

Fehlerquelle 3: Falscher Divisor

Wenn $x = 1$ eine Lösung ist, musst du durch

$$x - 1$$

teilen und nicht durch $x + 1$.

Fehlerquelle 4: Quotient nicht wieder gleich 0 setzen

Nach der Polynomdivision musst du mit der neuen Gleichung weiterrechnen.

Fehlerquelle 5: Erste Lösung in der Lösungsmenge vergessen

Die gefundene Lösung aus Schritt 2 gehört natürlich auch zur Lösungsmenge.

9. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Prüfe deine Lösung mit diesen Fragen:

- Steht die Gleichung rechts auf 0?
- Habe ich die Gleichung vereinfacht?
- Habe ich fehlende Potenzen ergänzt?
- Habe ich die Teiler des Absolutgliedes betrachtet?
- Habe ich eine erste Lösung richtig überprüft?
- Habe ich durch den richtigen Faktor geteilt?
- Habe ich das Ergebnis der Polynomdivision wieder gleich 0 gesetzt?
- Habe ich die neue Gleichung gelöst?
- Habe ich alle Lösungen in die Lösungsmenge übernommen?

vereinfachen → Lösung finden → teilen → weiterlösen

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.7 mitnehmen:

1. Die Polynomdivision passt oft bei ganzrationalen Gleichungen mit höherem Exponenten.
2. Vorher musst du meistens eine erste Lösung finden.
3. Dafür helfen oft die Teiler des Absolutgliedes.
4. Fehlende Potenzen musst du vor der Polynomdivision ergänzen.
5. Wenn $x = a$ eine Lösung ist, teilst du meist durch $x - a$.
6. Danach setzt du den Quotienten wieder gleich 0 und löst die neue Gleichung.
7. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Die Polynomdivision hilft dir, eine höhere Gleichung Schritt für Schritt zu vereinfachen.
Dafür brauchst du meistens zuerst eine passende erste Lösung.