

Ganzrationale Gleichungen lösen

Kapitel 4.8: Horner-Schema

Eine schnelle Variante zur Vereinfachung höherer Gleichungen

In diesem Kapitel lernst du das **Horner-Schema** kennen.

Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine vereinfachte Rechenmethode, die ähnlich wie die Polynomdivision funktioniert.

Es ist besonders praktisch, wenn du schon eine erste Lösung gefunden hast und das Polynom schnell vereinfachen möchtest.

Inhaltsverzeichnis

1. Wann benutzt man das Horner-Schema?	2
2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen	2
3. Lösung finden: Teiler des Absolutgliedes	2
4. Fehlende Potenzen ergänzen	3
5. Schema als Hilfestellung	3
6. Tipps für das Horner-Schema	4
7. Die Schritte	4
8. Beispiel	6
9. Fehlerquellen	9
10. Mini-Checkliste	9
Zusammenfassung	10

1. Wann benutzt man das Horner-Schema?

Das Horner-Schema benutzt man oft bei ganzrationalen Gleichungen mit höherem Exponenten.
Zum Beispiel:

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Hier ist der höchste Exponent 3.

Deshalb braucht man eine Strategie, um die Gleichung zu vereinfachen.

Wenn du schon eine erste Lösung gefunden hast, kannst du mit dem Horner-Schema den Grad der Gleichung senken.

Merksatz

Das Horner-Schema passt oft, wenn

- der Exponent höher als 2 ist und
- du bereits eine erste Lösung gefunden hast

Dann kannst du die Gleichung vereinfachen und anschließend die restlichen Lösungen bestimmen.

Tipp

Das Horner-Schema ist im Grunde eine verkürzte Form der Polynomdivision.
Viele Schülerinnen und Schüler finden es schneller und übersichtlicher.

2. Vorarbeit: Gleichung vereinfachen

Wie bei den anderen Lösungsstrategien gilt auch hier:

Erst vorbereiten, dann Methode erkennen

Bevor du das Horner-Schema verwenden kannst, muss die Gleichung passend vorbereitet sein.

Typische Vorarbeit:

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- alles auf eine Seite bringen, sodass rechts 0 steht

Merksatz

Auch beim Horner-Schema ist die wichtige Grundform:

Term = 0

Erst dann kannst du sinnvoll eine erste Lösung suchen.

3. Lösung finden: Teiler des Absolutgliedes

Bevor du das Horner-Schema anwenden kannst, brauchst du meistens zuerst eine Lösung.

Ein wichtiger Hinweis dafür sind die **Teiler des Absolutgliedes**.

Das Absolutglied ist die reine Zahl ohne x .

Zum Beispiel bei

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

ist das Absolutglied:

$$-4$$

Zum Testen betrachtet man die Teiler von 4:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Diese Zahlen probiert man dann als mögliche Lösungen aus.

Merksatz

Bei vielen Schulaufgaben mit Leitkoeffizient 1 findest du eine ganzzahlige Lösung oft unter den Teilern des Absolutgliedes.

Tipp

Wenn du eine Lösung $x = a$ gefunden hast, benutzt du genau diese Zahl a im Horner-Schema.

4. Fehlende Potenzen ergänzen

Für das Horner-Schema ist es sehr wichtig, dass **alle Potenzen der Reihe nach** vorkommen. Fehlt eine Potenz, musst du sie mit dem Koeffizienten 0 ergänzen.

Beispiel

Die Gleichung

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

enthält kein x^2 .

Für das Horner-Schema schreibst du deshalb:

$$x^3 + 0x^2 + 3x - 4 = 0$$

Achtung

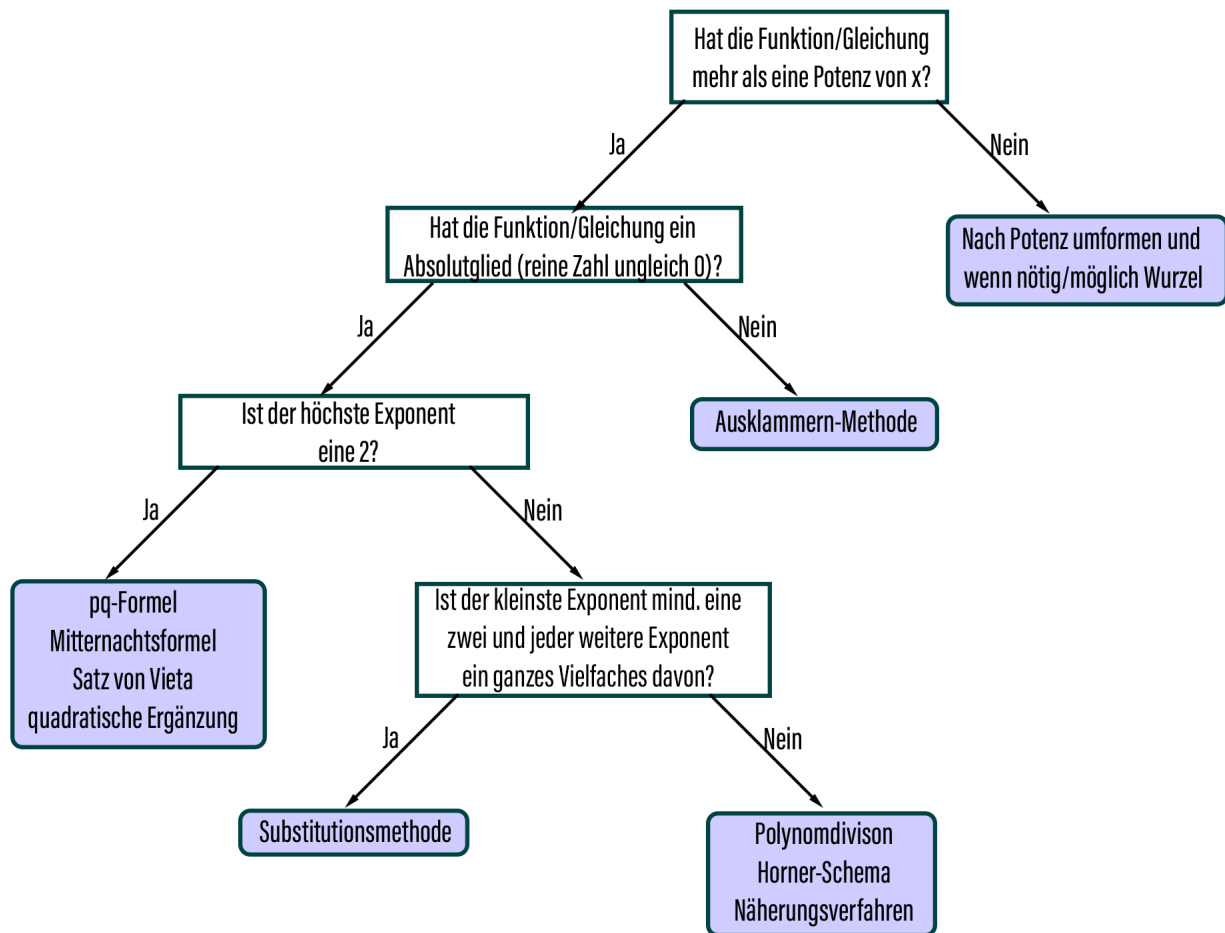
Wenn du fehlende Potenzen nicht ergänzt, stimmen die Koeffizienten im Horner-Schema nicht mehr.

5. Schema als Hilfestellung

Das Schema hilft dir dabei, die passende Lösungsstrategie zu erkennen. Für das Horner-Schema sind vor allem diese Fragen wichtig:

- Liegt eine ganzrationale Gleichung mit höherem Exponenten vor?
- Kann man eine erste Lösung finden?
- Sind die Teiler des Absolutgliedes hilfreich?
- Fehlen Potenzen, die vorher ergänzt werden müssen?

Wenn du eine erste Lösung gefunden hast, kannst du mit dem Horner-Schema weitermachen.



6. Tipps für das Horner-Schema

Tipp

Tipp 1: Schreibe zuerst nur die Koeffizienten auf.
Bei

$$x^3 + 0x^2 + 3x - 4$$

sind das:

1, 0, 3, -4

Tipp 2: Nimm die gefundene Lösung $x = a$ in die linke Ecke des Horner-Schemas.

Tipp 3: Nach dem Horner-Schema entsteht eine neue Gleichung mit kleinerem Exponenten. Diese musst du danach wieder gleich 0 setzen und lösen.

7. Die Schritte

1. Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Falls nötig: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen, alles auf eine Seite bringen und fehlende Potenzen ergänzen

2. Schritt 2: Lösung finden

Mit einer Probe nach einer ersten Lösung suchen, oft mithilfe der Teiler des Absolutgliedes

3. Schritt 3: Horner-Schema

Die Koeffizienten in das Horner-Schema eintragen und mit der gefundenen Lösung arbeiten

4. Schritt 4: Ergebnis $\rightarrow$ Gleichung $= 0$

Die neue, vereinfachte Gleichung aufschreiben und gleich 0 setzen

5. Schritt 5: Neue Gleichung lösen

Die neue, einfachere Gleichung lösen

6. Schritt 6: Lösungsmenge

Alle Lösungen sauber in der Lösungsmenge notieren:

$$L = \{\dots\}$$

8. Beispiel

Aufgabe

Löse die Gleichung

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

Ausgefüllte Lösung

Schritt 1: Gleichung vereinfachen

Die Gleichung steht bereits auf 0:

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Für das Horner-Schema müssen alle Potenzen der Reihe nach vorkommen. Hier fehlt der x^2 -Term. Deshalb ergänzen wir ihn mit $0x^2$:

$$x^3 + 0x^2 + 3x - 4 = 0$$

Die Koeffizienten sind also:

$$1, 0, 3, -4$$

Schritt 2: Lösung finden

Wir suchen zuerst eine einfache Lösung.

Dafür schauen wir auf die Teiler des Absolutgliedes.

Das Absolutglied ist:

$$-4$$

Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Wir testen $x = 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 0 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 &= 1 + 0 + 3 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $x_1 = 1$ eine Lösung.

Schritt 3: Horner-Schema

Wir verwenden die gefundene Lösung $x = 1$ und die Koeffizienten

$$1, 0, 3, -4$$

im Horner-Schema.

	1	0	3	-4
$x = 1$		$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	$4 \cdot 1 = 4$
	1	1	4	0

Dabei bedeutet:

1 wird nach unten übernommen

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$3 + 1 = 4$$

$$4 \cdot 1 = 4$$

$$-4 + 4 = 0$$

Der Rest ist 0.

Das bestätigt noch einmal, dass $x = 1$ wirklich eine Lösung ist.

Schritt 4: Ergebnis → **Gleichung** = 0

Aus der letzten Zeile

$$1, 1, 4, 0$$

entsteht zuerst die neue Gleichung:

$$1x^2 + 1x + 4 = 0$$

Diese schreiben wir noch vereinfacht:

$$x^2 + x + 4 = 0$$

Der letzte Wert 0 ist nur der Rest.

Er gehört nicht zur neuen Gleichung, sondern zeigt nur, dass die Division aufgegangen ist.

Schritt 5: Neue Gleichung lösen

Die neue Gleichung ist quadratisch.

Wir lösen sie mit der pq-Formel.

$$x^2 + x + 4 = 0$$

Also gilt:

$$p = 1, \quad q = 4$$

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{16}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} \end{aligned}$$

Unter der Wurzel steht eine negative Zahl.

Deshalb hat diese quadratische Gleichung keine weiteren reellen Lösungen.

Achtung

In den reellen Zahlen kann man keine Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen.
Deshalb entstehen aus $x^2 + x + 4 = 0$ keine weiteren reellen Lösungen.

Schritt 6: Lösungsmenge

Wir haben nur eine reelle Lösung gefunden:

$$x_1 = 1$$

Also gilt:

$$L = \{1\}$$

9. Fehlerquellen

Achtung

Fehlerquelle 1: Fehlende Potenzen nicht ergänzen

Bei

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

musst du zuerst schreiben:

$$x^3 + 0x^2 + 3x - 4 = 0$$

Fehlerquelle 2: Eine falsche Lösung benutzen

Im Horner-Schema darfst du nur mit einer Zahl arbeiten, die wirklich eine Lösung ist.

Fehlerquelle 3: Koeffizienten vertauschen

Im Horner-Schema werden nur die Koeffizienten eingetragen, und zwar in der richtigen Reihenfolge.

Fehlerquelle 4: Neue Gleichung nicht weiterlösen

Das Horner-Schema liefert dir nur eine einfachere Gleichung. Danach musst du noch weiterrechnen.

Fehlerquelle 5: Erste Lösung vergessen

Die gefundene Lösung aus Schritt 2 gehört natürlich auch zur Lösungsmenge.

10. Mini-Checkliste

Mini-Checkliste

Prüfe deine Lösung mit diesen Fragen:

- Steht die Gleichung rechts auf 0?
- Habe ich die Gleichung vereinfacht?
- Habe ich fehlende Potenzen ergänzt?
- Habe ich die Teiler des Absolutgliedes betrachtet?
- Habe ich eine erste Lösung richtig überprüft?
- Habe ich die richtigen Koeffizienten ins Horner-Schema eingetragen?
- Habe ich die neue Gleichung wieder gleich 0 gesetzt?
- Habe ich die neue Gleichung gelöst?
- Habe ich alle Lösungen in die Lösungsmenge übernommen?

vereinfachen → Lösung finden → Horner-Schema → weiterlösen

Zusammenfassung

Das musst du aus Kapitel 4.8 mitnehmen:

1. Das Horner-Schema passt oft bei ganzrationalen Gleichungen mit höherem Exponenten.
2. Vorher musst du meistens eine erste Lösung finden.
3. Dafür helfen oft die Teiler des Absolutgliedes.
4. Fehlende Potenzen musst du vor dem Horner-Schema ergänzen.
5. Im Horner-Schema arbeitest du mit den Koeffizienten.
6. Danach entsteht eine neue Gleichung mit kleinerem Exponenten.
7. Diese neue Gleichung setzt du wieder gleich 0 und löst sie.
8. Am Ende gibst du die Lösungsmenge sauber an.

Wichtigster Gedanke

Das Horner-Schema ist eine schnelle Methode, um eine höhere ganzrationale Gleichung zu vereinfachen. Dafür brauchst du meistens zuerst eine passende erste Lösung.