

Wofür braucht man ganzrationale Gleichungen?

Ganzrationale Gleichungen entstehen immer dann, wenn man eine Bedingung an eine ganzrationale Funktion stellt. Aus der Bedingung wird eine Gleichung, die anschließend gelöst werden muss.

Grundidee:

Mathematische Bedingung $\longrightarrow$ ganzrationale Gleichung lösen

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
1. Nullstellen, Schnittstellen und Punkte auf dem Graphen		
Nullstellen	$f(x) = 0$	Gegeben ist $f(x) = x^3 - 4x$. Gesucht sind die Nullstellen. Also: $x^3 - 4x = 0$
Schnittpunkte mit der x -Achse	$f(x) = 0$	Der Graph schneidet die x -Achse genau dort, wo der Funktionswert 0 ist. Also: $f(x) = 0$
Schnittpunkte zweier Graphen	$f(x) = g(x)$	Gegeben sind $f(x) = x^2 + 2x$ und $g(x) = 3x + 4$. Schnittpunkte: $x^2 + 2x = 3x + 4$
Schnittstellen zweier Graphen	$f(x) = g(x)$	Wenn nur die x -Werte der Schnittpunkte gesucht sind, löst man: $f(x) = g(x)$ Danach bringt man alles auf eine Seite: $f(x) - g(x) = 0$
Bestimmter Funktionswert	$f(x) = y_0$	Wann hat $f(x) = x^3 - 2x + 1$ den Wert 5? Also: $x^3 - 2x + 1 = 5$
Fehlende x -Koordinate eines Punktes	$f(x) = y$	Ein Punkt $P(x \mid 8)$ liegt auf $f(x) = x^3 - x$. Also: $x^3 - x = 8$
Punkt liegt auf dem Graphen	$y = f(x)$	Liegt $P(2 \mid 6)$ auf $f(x) = x^3 - x$? Also prüft man: $6 = 2^3 - 2$

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
Parameter durch Punkt bestimmen	$f(x_P) = y_P$	Die Funktion $f(x) = ax^2 + 1$ geht durch $P(3 10)$. Also: $10 = a \cdot 3^2 + 1$
Parameter durch Nullstelle bestimmen	$f(x_0) = 0$	Die Funktion $f(x) = x^2 + a$ hat bei $x = 4$ eine Nullstelle. Also: $f(4) = 0$ $4^2 + a = 0$

2. Ableitungen: Extremstellen, Hochstellen, Tiefstellen und Wendestellen

Extremstellen	$f'(x) = 0$	Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x$. Mögliche Extremstellen findet man mit: $f'(x) = 0$ $3x^2 - 3 = 0$
Hochstellen	zuerst $f'(x) = 0$, danach $f''(x) < 0$	Mögliche Hochstellen findet man zuerst über: $f'(x) = 0$ Ob es wirklich eine Hochstelle ist, prüft man danach mit $f''(x)$
Tiefstellen	zuerst $f'(x) = 0$, danach $f''(x) > 0$	Mögliche Tiefstellen findet man zuerst über: $f'(x) = 0$ Ob es wirklich eine Tiefstelle ist, prüft man danach mit $f''(x)$
Wendestellen	$f''(x) = 0$	Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2$. Mögliche Wendestellen findet man mit: $f''(x) = 0$ $6x - 6 = 0$
Sattelstellen / Terrassenstellen	$f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$	Eine Sattelstelle ist eine Wendestelle mit waagerechter Tangente. Also: $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
Waagerechte Tangente	$f'(x) = 0$	An welcher Stelle hat $f(x) = x^2 - 4x + 1$ eine waagerechte Tangente? Also: $f'(x) = 0$ $2x - 4 = 0$
Tangente mit bestimmter Steigung	$f'(x) = m$	Wo hat $f(x) = x^2 + 1$ die Tangentensteigung 6? Also: $f'(x) = 6$ $2x = 6$
Normale mit bestimmter Steigung	$f'(x) = -\frac{1}{m_{\text{Normale}}}$	Die Normale soll die Steigung $-\frac{1}{4}$ haben. Dann hat die Tangente die Steigung 4. Also: $f'(x) = 4$
Gleiche Steigung zweier Graphen	$f'(x) = g'(x)$	Wo haben $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4x - 1$ dieselbe Steigung? Also: $2x = 4$
Berührungspunkt zweier Graphen	$f(x) = g(x)$ und $f'(x) = g'(x)$	Zwei Graphen berühren sich, wenn sie denselben Punkt und dort dieselbe Steigung haben. Also: $f(x) = g(x)$ und $f'(x) = g'(x)$
Monotoniewechsel	$f'(x) = 0$	Um mögliche Wechsel von steigend zu fallend oder von fallend zu steigend zu finden, löst man: $f'(x) = 0$
Krümmungswechsel	$f''(x) = 0$	Um mögliche Wechsel von Links- zu Rechtskrümmung zu finden, löst man: $f''(x) = 0$
Parameter durch Extremstelle bestimmen	$f'(x_E) = 0$	Die Funktion soll bei $x = 2$ eine Extremstelle haben. Also: $f'(2) = 0$

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
Parameter durch Extrempunkt bestimmen	$f'(x_E) = 0$ und $f(x_E) = y_E$	Der Graph hat einen Extrempunkt bei $E(2 \mid 5)$. Also: $f'(2) = 0$ und $f(2) = 5$
Parameter durch Wendestelle bestimmen	$f''(x_W) = 0$	Die Funktion soll bei $x = 1$ eine Wendestelle haben. Also: $f''(1) = 0$
Parameter durch Wendepunkt bestimmen	$f''(x_W) = 0$ und $f(x_W) = y_W$	Der Graph hat einen Wendepunkt bei $W(1 \mid 3)$. Also: $f''(1) = 0$ und $f(1) = 3$
Parameter durch Tangentensteigung bestimmen	$f'(x_T) = m$	Die Tangente an der Stelle $x = 2$ soll die Steigung 5 haben. Also: $f'(2) = 5$
3. Flächen und Integrale bei ganzrationalen Funktionen		
Fläche mit der x -Achse vorbereiten	$f(x) = 0$	Bevor man die Fläche zwischen Graph und x -Achse berechnet, braucht man die Nullstellen. Also: $f(x) = 0$
Fläche zwischen zwei Graphen vorbereiten	$f(x) = g(x)$	Bevor man die Fläche zwischen zwei Graphen berechnet, braucht man die Schnittstellen. Also: $f(x) = g(x)$
Bestimmter Flächeninhalt	$\int_a^b f(x) dx = A$	Die obere Grenze b ist gesucht und die Fläche soll 12 sein. Also: $\int_0^b f(x) dx = 12$ Nach dem Integrieren entsteht wieder eine Gleichung in b

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
Bestimmter Flächeninhalt zwischen zwei Graphen	$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = A$	Die Fläche zwischen zwei Graphen soll 20 sein. Also: $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = 20$

Bestimmter Mittelwert einer Funktion	$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = m$	Der mittlere Funktionswert soll 5 sein. Also: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = 5$
--------------------------------------	--------------------------------------	---

4. Typische Anwendungen mit ganzrationalen Funktionen

Gewinnschwellen	$G(x) = 0$	Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Gewinnschwellen findet man mit: $G(x) = 0$
-----------------	------------	--

Break-even-Point	$E(x) = K(x)$	Erlös und Kosten sind gleich. Also: $E(x) = K(x)$ Danach entsteht meist eine ganzrationale Gleichung
------------------	---------------	--

Gewinnmaximum	$G'(x) = 0$	Der Gewinn soll maximal werden. Mögliche Stelle: $G'(x) = 0$
---------------	-------------	---

Kostenminimum	$K'(x) = 0$	Die Kosten sollen minimal werden. Mögliche Stelle: $K'(x) = 0$
---------------	-------------	---

Maximaler Erlös	$E'(x) = 0$	Der Erlös soll maximal werden. Mögliche Stelle: $E'(x) = 0$
-----------------	-------------	--

Produktionsmenge bei bestimmtem Gewinn	$G(x) = G_0$	Bei welcher Produktionsmenge beträgt der Gewinn 1000? Also: $G(x) = 1000$
--	--------------	--

Produktionsmenge bei bestimmten Kosten	$K(x) = K_0$	Bei welcher Produktionsmenge betragen die Kosten 5000? Also: $K(x) = 5000$
--	--------------	---

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
Maximale Fläche	$A'(x) = 0$	Eine Fläche $A(x)$ soll maximal werden. Also: $A'(x) = 0$
Minimale Fläche	$A'(x) = 0$	Eine Fläche $A(x)$ soll minimal werden. Also: $A'(x) = 0$
Maximales Volumen	$V'(x) = 0$	Ein Volumen $V(x)$ soll maximal werden. Also: $V'(x) = 0$
Minimale Oberfläche	$O'(x) = 0$	Eine Oberfläche $O(x)$ soll minimal werden. Also: $O'(x) = 0$
Bestimmte Höhe bei einer Bewegung	$h(t) = h_0$	Wann erreicht ein Ball die Höhe 10? Also: $h(t) = 10$
Aufprall auf den Boden	$h(t) = 0$	Ein Ball trifft den Boden, wenn seine Höhe 0 ist. Also: $h(t) = 0$
Maximale Höhe	$h'(t) = 0$	Die Höhe $h(t)$ ist maximal, wenn: $h'(t) = 0$
Gleiche Höhe zweier Objekte	$h_1(t) = h_2(t)$	Zwei Objekte sind gleich hoch, wenn gilt: $h_1(t) = h_2(t)$
Bestand erreicht bestimmten Wert	$B(t) = B_0$	Ein Bestand wird durch eine ganzrationale Funktion beschrieben. Wann sind 500 Stück vorhanden? Also: $B(t) = 500$
Änderungsrate erreicht bestimmten Wert	$B'(t) = m$	Wann verändert sich der Bestand mit 20 Einheiten pro Tag? Also: $B'(t) = 20$

Mathematischer Inhalt	Bedingung	Mini-Beispiel: Bedingung aufstellen
Maximale Änderungsrate	$B''(t) = 0$	Wenn $B'(t)$ maximal werden soll, untersucht man die Extremstellen von $B'(t)$. Also: $B''(t) = 0$