

Vor-Vorarbeit: Gleichung auf die Form $\text{Term} = 0$ bringen

Bevor man eine ganzrationale Gleichung lösen kann, muss sie oft erst vorbereitet werden.

Merksatz

Viele Lösungsstrategien funktionieren erst dann sinnvoll, wenn die Gleichung in dieser Form steht:

$$\boxed{\text{Term} = 0}$$

Das bedeutet: Alle Terme stehen auf einer Seite der Gleichung. Auf der anderen Seite steht nur noch 0.

Gleichung vorbereiten $\longrightarrow$ $\text{Term} = 0$ $\longrightarrow$ passende Lösungsstrategie wählen

Schritt 1: Klammern auflösen

Bevor man eine Gleichung lösen kann, müssen Klammern meistens zuerst aufgelöst werden.

1. Zahl mal Klammer

Eine Zahl vor der Klammer wird mit jedem Term in der Klammer multipliziert:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Beispiel:

$$3(x^2 - 2x + 5) = 3x^2 - 6x + 15$$

2. Klammer mal Zahl

Auch wenn die Zahl hinter der Klammer steht, wird jeder Term in der Klammer multipliziert:

$$(b + c) \cdot a = ab + ac$$

Beispiel:

$$(x^2 + 4x - 1) \cdot 2 = 2x^2 + 8x - 2$$

3. Plus vor der Klammer

Ein Plus vor der Klammer verändert die Vorzeichen nicht:

$$+(x^2 - 3x + 4) = x^2 - 3x + 4$$

Beispiel:

$$5 + (x^2 - 3x) = 5 + x^2 - 3x$$

4. Minus vor der Klammer

Ein Minus vor der Klammer dreht alle Vorzeichen in der Klammer um:

$$-(x^2 - 3x + 4) = -x^2 + 3x - 4$$

Beispiel:

$$7 - (x^2 + 2x - 5) = 7 - x^2 - 2x + 5$$

5. Negative Zahl mal Klammer

Bei einer negativen Zahl vor der Klammer werden alle Terme multipliziert und die Vorzeichen ändern sich passend:

$$-2(x^2 - 3x + 4) = -2x^2 + 6x - 8$$

Typischer Fehler

Bei einem Minus vor der Klammer wird oft nur das erste Vorzeichen geändert. Das ist falsch.

$$-(x^2 - 4x + 7) \neq -x^2 - 4x + 7$$

Richtig ist:

$$-(x^2 - 4x + 7) = -x^2 + 4x - 7$$

Schritt 2: Gleichartige Terme zusammenfassen

Nach dem Auflösen der Klammern fasst man gleichartige Terme zusammen.

Gleichartig bedeutet: Die Terme haben dieselbe Potenz von x .

$$3x^2 + 5x - x^2 + 7x - 4$$

Zusammenfassen:

$$3x^2 - x^2 = 2x^2$$

$$5x + 7x = 12x$$

Also:

$$3x^2 + 5x - x^2 + 7x - 4 = 2x^2 + 12x - 4$$

Wichtig: Man darf nur gleiche Potenzen zusammenfassen.

$$x^2 + x \quad \text{kann man nicht zusammenfassen}$$

Schritt 3: Auf 0 bringen

Viele Gleichungen stehen am Anfang noch nicht in der Form $\text{Term} = 0$. Dann bringt man alle Terme auf eine Seite.

Grundprinzip:

$$\text{linke Seite} = \text{rechte Seite}$$

$$\implies \text{linke Seite} - \text{rechte Seite} = 0$$

Beispiel mit Zahl auf der rechten Seite:

$$x^2 + 4x = 12$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Beispiel mit Term auf beiden Seiten:

$$2x^2 + 3x = x^2 - 5$$

$$2x^2 + 3x - x^2 + 5 = 0$$

$$x^2 + 3x + 5 = 0$$

Beispiel mit mehreren Termen auf beiden Seiten:

$$3x^2 - 2x + 1 = x^2 + 5x - 4$$

$$3x^2 - 2x + 1 - x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

Schritt 4: Nach Potenzen sortieren

Am Ende schreibt man die Gleichung übersichtlich nach fallenden Potenzen:

$$x^3, \quad x^2, \quad x, \quad \text{Zahl}$$

Beispiel:

$$5 - 3x + x^3 + 2x^2 = 0$$

Sortiert:

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 0$$

Jetzt erkennt man viel besser, welche Lösungsstrategie passen könnte.

Beispiel 1: Zahl mal Klammer und auf 0 bringen

Gegeben ist die Gleichung

$$2(x^2 - 3x) + 5 = x^2 + 1$$

$$2(x^2 - 3x) + 5 = x^2 + 1 \quad | \text{Klammer auflösen}$$

$$2x^2 - 6x + 5 = x^2 + 1 \quad | -x^2$$

$$x^2 - 6x + 5 = 1 \quad | -1$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Jetzt steht die Gleichung in der Form

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Beispiel 2: Minus vor der Klammer

Gegeben ist die Gleichung

$$-(x^2 - 5x + 2) + 3x = 4$$

$$-(x^2 - 5x + 2) + 3x = 4 \quad | \text{Minusklammer auflösen}$$

$$-x^2 + 5x - 2 + 3x = 4 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$-x^2 + 8x - 2 = 4 \quad | -4$$

$$-x^2 + 8x - 6 = 0$$

Jetzt steht die Gleichung in der Form

$$-x^2 + 8x - 6 = 0$$

Beispiel 3: Terme auf beiden Seiten

Gegeben ist die Gleichung

$$3x^2 + 4x - 2 = x^2 - 5x + 7$$

$$3x^2 + 4x - 2 = x^2 - 5x + 7 \quad | - x^2$$

$$2x^2 + 4x - 2 = -5x + 7 \quad | + 5x$$

$$2x^2 + 9x - 2 = 7 \quad | - 7$$

$$2x^2 + 9x - 9 = 0$$

Jetzt steht die Gleichung in der Form

$$2x^2 + 9x - 9 = 0$$

Checkliste vor dem Lösen

Bevor du die Gleichung löst, prüfe:

- Sind alle Klammern aufgelöst?
- Wurde ein Minus vor der Klammer richtig beachtet?
- Sind gleichartige Terme zusammengefasst?
- Steht auf einer Seite wirklich 0?
- Ist der Term nach Potenzen sortiert?

Erst danach wählst du die passende Strategie.