

Aufgabe 2b: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Die Vor-Vorarbeit können wir hier überspringen, da die Gleichung bereits alle vier Merkmale erfüllt:

$$\text{Term} = 0$$

Die Gleichung ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da in der Gleichung nur x^4 , x^2 und eine reine Zahl vorkommen, liegt eine biquadratische Gleichung vor. Deshalb verwenden wir die Substitutionsmethode.

1. Schritt: Vor-Vorarbeit prüfen

Normalerweise prüfen wir zuerst, ob die Gleichung vorbereitet werden muss.

Die vier Merkmale sind:

1. In die Form $\text{Term} = 0$ bringen
2. Klammerfrei schreiben
3. Vollständig zusammenfassen
4. Nach absteigenden Potenzen ordnen

Bei der Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

sind bereits alle vier Merkmale erfüllt. Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

Auffällig ist außerdem, dass nur diese Bestandteile vorkommen:

$$x^4, \quad x^2, \quad \text{reine Zahl}$$

Damit liegt eine biquadratische Gleichung vor. Deshalb lösen wir die Gleichung mit der Substitutionsmethode.

2. Schritt: Substitution $z = x^2$

Wir ersetzen die kleinste vorkommende Potenz durch z :

$$z = x^2$$

Dann gilt automatisch:

$$z^2 = (x^2)^2 = x^4$$

Damit können wir die Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

umschreiben zu:

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

Merke

Bei einer Substitution ersetzt man einen komplizierten Ausdruck durch eine neue Variable. Hier gilt:

$$z = x^2$$

und damit:

$$z^2 = x^4$$

Aus der Gleichung in x wird dadurch zuerst eine einfachere Gleichung in z .

3. Schritt: Neue Gleichung in z lösen

Jetzt lösen wir die neue Gleichung:

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel. Dafür schreiben wir:

$$p = -17 \quad \text{und} \quad q = 16$$

Die pq -Formel lautet:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{-17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-17}{2}\right)^2 - 16} \\ &= \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{64}{4}} \\ &= \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} \\ &= \frac{17}{2} \pm \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{17}{2} - \frac{15}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z_2 &= \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -17, \quad c = 16$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \\ &= \frac{17 \pm 15}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{17 - 15}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z_2 &= \frac{17 + 15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \end{aligned}$$

Die Mitternachtsformel liefert also dieselben Zwischenlösungen:

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = 16$$

4. Schritt: Rücksubstitution $z = x^2$

Jetzt gehen wir wieder zurück zu x . Wir wissen:

$$z = x^2$$

Außerdem haben wir gefunden:

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = 16$$

Also gilt:

$$x^2 = 1$$

oder

$$x^2 = 16$$

5. Schritt: Nach x auflösen

Jetzt lösen wir beide Gleichungen einzeln.

Für die erste Gleichung gilt:

$$x^2 = 1 \quad |\sqrt{} \\ x = \pm 1$$

Also erhalten wir:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Für die zweite Gleichung gilt:

$$x^2 = 16 \quad |\sqrt{} \\ x = \pm 4$$

Also erhalten wir:

$$x_3 = -4 \quad \text{und} \quad x_4 = 4$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die Lösungen sind:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 4$$

Sortiert schreiben wir:

$$-4, -1, 1, 4$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; -1; 1; 4\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 4$$

Also gilt:

$$L = \{-4; -1; 1; 4\}$$