

Aufgabe 2c: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine quadratische Gleichung vorliegt, können wir sie mit der pq -Formel lösen. Dafür müssen wir die Gleichung zuerst normieren, da vor x^2 noch der Faktor 4 steht.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Gleichung normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Bei unserer Gleichung steht vor x^2 aber noch der Faktor 4:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Deshalb teilen wir die gesamte Gleichung durch 4:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$$

Merke

Die pq -Formel darf man nur direkt anwenden, wenn vor x^2 der Faktor 1 steht.
Die Gleichung muss also die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

haben.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die normierte Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$$

Wir vergleichen mit der allgemeinen Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = \frac{25}{4}$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen $p = -5$ und $q = \frac{25}{4}$ ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{0} \\ &= \frac{5}{2} \pm 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

auch direkt mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

gilt:

$$a = 4, \quad b = -20, \quad c = 25$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \\ &= \frac{20 \pm \sqrt{0}}{8} \\ &= \frac{20 \pm 0}{8} \\ &= \frac{20}{8} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also:

$$x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Wir haben nur eine Lösung erhalten:

$$x = \frac{5}{2}$$

Da die Wurzel in der pq -Formel gleich 0 war, handelt es sich um eine doppelte Lösung.

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösung

$$x = \frac{5}{2}$$

Also gilt:

$$L = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$