

Aufgabe 2f: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da in beiden Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, verwenden wir die Ausklammern-Methode. Dafür klammern wir die kleinste Potenz von x aus.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Kleinste Potenz ausklammern

Jetzt suchen wir den gemeinsamen Faktor der beiden Summanden:

$$2x^3 + 6x^2$$

Wir schreiben uns die beiden Summanden genauer an:

$$2x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$6x^2 = 6 \cdot x \cdot x$$

In beiden Summanden kommt x^2 vor. Deshalb klammern wir x^2 aus:

$$2x^3 + 6x^2 = x^2(2x + 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

die Gleichung

$$x^2(2x + 6) = 0$$

Merke

Wenn in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, kann man diesen Faktor ausklammern. Hier ist die kleinste Potenz:

$$x^2$$

Deshalb gilt:

$$2x^3 + 6x^2 = x^2(2x + 6)$$

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x^2(2x + 6) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x^2 = 0$$

oder

$$2x + 6 = 0$$

Das bedeutet: Mindestens einer der beiden Faktoren muss gleich 0 sein.

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Jetzt lösen wir die beiden Gleichungen einzeln.

Zuerst:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 & | \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 0$$

Nun lösen wir die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= 0 & | -6 \\ 2x &= -6 & | :2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = -3$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, 0$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; 0\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3 \quad \text{und} \quad x = 0$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 0\}$$