

Aufgabe 2g: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine quadratische Gleichung vorliegt und vor x^2 bereits der Faktor 1 steht, können wir direkt die pq -Formel verwenden.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Bei unserer Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

steht vor x^2 bereits der Faktor 1.

Die Gleichung ist also schon normiert. Wir müssen hier nichts mehr teilen.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die Gleichung lautet:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Wir vergleichen mit der allgemeinen Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = 2 \quad \text{und} \quad q = -8$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = 2 \quad \text{und} \quad q = -8$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} \\ &= -1 \pm \sqrt{1+8} \\ &= -1 \pm \sqrt{9} \\ &= -1 \pm 3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -1 - 3 = -4$$

$$x_2 = -1 + 3 = 2$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -8$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \\ x_2 &= \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also:

$$x_1 = -4 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = -4 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; 2\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Also gilt:

$$L = \{-4; 2\}$$