

**Aufgabe 2h: Berechne die Lösung der Gleichung**

Löse die Gleichung mit  $x \in \mathbb{R}$  und gib die Lösungsmenge an.

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

**Lösung**

Gegeben ist die Gleichung

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Die Gleichung ist bereits in Produktform gegeben. Deshalb können wir direkt den Satz vom Nullprodukt anwenden.

Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist, setzen wir jeden Faktor einzeln gleich 0.

**1. Schritt: Produktform erkennen**

Die Gleichung lautet:

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Die linke Seite besteht aus einem Produkt aus drei Faktoren:

$$x + 4$$

$$x - 1$$

$$x - 5$$

Da dieses Produkt gleich 0 ist, muss mindestens einer dieser Faktoren gleich 0 sein.

**Merke**

Satz vom Nullprodukt:

Wenn ein Produkt gleich 0 ist, dann muss mindestens ein Faktor gleich 0 sein.

Also gilt zum Beispiel:

$$a \cdot b \cdot c = 0$$

genau dann, wenn

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0$$

ist.

**2. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden**

Wir wenden den Satz vom Nullprodukt auf die Gleichung an:

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Also setzen wir jeden Faktor einzeln gleich 0:

$$x + 4 = 0$$

oder

$$x - 1 = 0$$

oder

$$x - 5 = 0$$

**3. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen**

Jetzt lösen wir die drei Gleichungen einzeln.

Für den ersten Faktor gilt:

$$\begin{aligned} x + 4 &= 0 & | -4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -4$$

Für den zweiten Faktor gilt:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 & | +1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = 1$$

Für den dritten Faktor gilt:

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 & | +5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_3 = 5$$

**4. Schritt: Lösungsmenge angeben**

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 5$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; 1; 5\}$$

**Ergebnis**

Die Gleichung

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4, \quad x = 1, \quad x = 5$$

Also gilt:

$$L = \{-4; 1; 5\}$$