

Aufgabe 3a: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

Hier starten wir mit der Vor-Vorarbeit. Das bedeutet: Wir bringen die Gleichung zuerst in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dann schreiben wir sie klammerfrei, fassen vollständig zusammen und ordnen nach absteigenden Potenzen.

Danach entsteht eine Gleichung, die wir nach x^2 auflösen können. Anschließend ziehen wir die Wurzel und beachten dabei beide Lösungen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Gegeben ist:

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

Wir lösen zuerst die Klammer auf:

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

$$3x^2 - 6 - 5 = 2x^2 - 2$$

Nun fassen wir links zusammen:

$$3x^2 - 11 = 2x^2 - 2$$

Jetzt bringen wir alle Terme auf eine Seite:

$$3x^2 - 11 = 2x^2 - 2 \quad | - 2x^2$$

$$x^2 - 11 = -2 \quad | + 2$$

$$x^2 - 9 = 0$$

Damit ist die Gleichung jetzt in der gewünschten Form:

$$\text{Term} = 0$$

Außerdem ist sie:

1. klammerfrei,
2. vollständig zusammengefasst,
3. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^2 - 9 = 0$$

2. Schritt: Nach x^2 auflösen

Jetzt lösen wir die Gleichung nach x^2 auf.

Aus

$$x^2 - 9 = 0$$

machen wir:

$$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$$

$$x^2 = 9$$

Damit haben wir die Gleichung auf die Form

$$x^2 = 9$$

gebracht.

Merke

Wenn du eine Gleichung der Form

$$x^2 = a$$

hast, musst du beim Wurzelziehen beide Lösungen beachten:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Das bedeutet: Es kann eine positive und eine negative Lösung geben.

3. Schritt: Beide Wurzeln beachten

Aus

$$x^2 = 9$$

ziehen wir die Wurzel.

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 3$$

Also erhalten wir zwei Lösungen:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 3\}$$