

Aufgabe 3b: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine ganzrationale Gleichung dritten Grades vorliegt, suchen wir zuerst eine Lösung. Danach verwenden wir das Horner-Schema, um den Grad der Gleichung zu verringern.

Alternativ könnte man an dieser Stelle auch eine Polynomdivision durchführen.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades versuchen wir zuerst, eine Nullstelle zu finden.

Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind die Teiler des Absolutgliedes -6 :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Wir testen $x = 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 &= 1 + 4 + 1 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$x_1 = 1$$

eine Lösung der Gleichung.

Merke

Wenn $x = 1$ eine Lösung der Gleichung ist, dann ist

$$x - 1$$

ein Faktor des Terms.

Mit dem Horner-Schema können wir nun herausfinden, welcher quadratische Faktor noch übrig bleibt.

3. Schritt: Horner-Schema anwenden

Die Koeffizienten des Terms

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

sind:

$$1 \quad 4 \quad 1 \quad -6$$

Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, verwenden wir im Horner-Schema die Zahl 1:

	1	4	1	-6
		$1 \cdot 1 =$	$1 \cdot 5 =$	$1 \cdot 6 =$
		1	5	6
$x_1 = 1$	1	5	6	0

Damit erhält man unten die Koeffizienten der quadratischen Gleichung:

$$1x^2 + 5x + 6$$

Die restliche Gleichung lautet also:

$$1x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Alternative: Polynomdivision

Alternativ zum Horner-Schema kann man auch eine Polynomdivision durchführen.

Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, teilen wir den Term

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

durch

$$x - 1$$

Die Polynomdivision lautet:

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad : (x - 1) = x^2 + 5x + 6 \\ -(x^3 - 1x^2) \\ \hline 5x^2 + x \\ -(5x^2 - 5x) \\ \hline 6x - 6 \\ -(6x - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Da am Ende 0 übrig bleibt, ist die Polynomdivision aufgegangen.

Auch hier erhalten wir:

$$x^2 + 5x + 6$$

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Durch das Horner-Schema haben wir den Term zerlegt:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

die Gleichung

$$(x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x - 1 = 0$$

oder

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Die erste Gleichung liefert wieder:

$$x_1 = 1$$

Jetzt müssen wir noch die quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel. Alternativ kann man auch die Mitternachtsformel verwenden.

Wir vergleichen mit

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = 5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\ x_3 &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die quadratische Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-5 - 1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\ x_3 &= \frac{-5 + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, -2, 1$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; -2; 1\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3, \quad x = -2, \quad x = 1$$

Also gilt:

$$L = \{-3; -2; 1\}$$