Aufgabe 3c: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$2(x^2+4x)(x+1)^2=0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$2(x^2+4x)(x+1)^2=0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben.
Da die linke Seite ein Produkt ist, können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden. Der Faktor 2 kann dabei nicht 0 werden. Deshalb betrachten wir nur die Faktoren mit x.

1. Schritt: Produktform erkennen

Die Gleichung lautet:

$$2(x^2+4x)(x+1)^2=0$$

Die linke Seite besteht aus einem Produkt:

$$2 \cdot (x^2+4x) \cdot (x+1)^2=0$$

Der Faktor 2 ist nie 0:

$$2 \neq 0$$

Deshalb können nur diese Faktoren für die Lösungen sorgen:

$$x^2+4x$$

und

$$(x+1)^2$$

Merke

Satz vom Nullprodukt:
Wenn ein Produkt gleich 0 ist, dann muss mindestens ein Faktor gleich 0 sein.
Also gilt:

$$a \cdot b \cdot c = 0$$

genau dann, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist.
Ein Zahlenfaktor wie 2 liefert dabei keine Lösung, weil gilt:

$$2 \neq 0$$

2. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Wir wenden den Satz vom Nullprodukt an:

$$2(x^2+4x)(x+1)^2=0$$

Da $2 \neq 0$, setzen wir die anderen Faktoren gleich 0:

$$x^2+4x=0$$

oder

$$(x+1)^2=0$$

3. Schritt: Erste Gleichung lösen

Zuerst lösen wir:

$$x^2+4x=0$$

Hier können wir x ausklammern:

$$x(x+4)=0$$

Jetzt wenden wir wieder den Satz vom Nullprodukt an:

$$x=0$$

oder

$$x+4=0$$

Die zweite Gleichung lösen wir:

$$\begin{aligned} x+4&=0 \quad |-4 \\ x&=-4 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus der ersten Gleichung:

$x_1=0$ und $x_2=-4$

4. Schritt: Zweite Gleichung lösen

Jetzt lösen wir:

$$(x+1)^2 = 0$$

Wir ziehen die Wurzel:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= 0 \quad |\sqrt{\ } \\ x+1 &= 0\end{aligned}$$

Nun lösen wir nach x auf:

$$\begin{aligned}x+1 &= 0 \quad |-1 \\ x &= -1\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_3 = -1$$

Hinweis: Da der Faktor $(x+1)$ quadriert ist, kommt die Lösung $x = -1$ doppelt vor. In der Lösungsmenge schreiben wir sie aber nur einmal.

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die Lösungen sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -1$$

Sortiert schreiben wir:

$$-4,\ -1,\ 0$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; -1; 0\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$2(x^2+4x)(x+1)^2 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 0$$

Also gilt:

$$\boxed{L = \{-4; -1; 0\}}$$