

Aufgabe 3d: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine ganzrationale Gleichung dritten Grades vorliegt, suchen wir zuerst eine Lösung. Danach verwenden wir das Horner-Schema, um den Grad der Gleichung zu verringern.

Alternativ könnte man an dieser Stelle auch eine Polynomdivision durchführen.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades versuchen wir zuerst, eine Nullstelle zu finden.

Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind die Teiler des Absolutgliedes 12:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Wir testen $x = 2$:

$$\begin{aligned} 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 &= 8 - 12 - 8 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$x_1 = 2$$

eine Lösung der Gleichung.

Merke

Wenn $x = 2$ eine Lösung der Gleichung ist, dann ist

$$x - 2$$

ein Faktor des Terms.

Mit dem Horner-Schema können wir nun herausfinden, welcher quadratische Faktor noch übrig bleibt.

3. Schritt: Horner-Schema anwenden

Die Koeffizienten des Terms

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

sind:

$$1 \quad -3 \quad -4 \quad 12$$

Da $x_1 = 2$ eine Nullstelle ist, verwenden wir im Horner-Schema die Zahl 2:

	1	-3	-4	12
		$2 \cdot 1 =$	$2 \cdot (-1) =$	$2 \cdot (-6) =$
		2	-2	-12
$x_1 = 2$	1	-1	-6	0

Damit erhält man unten die Koeffizienten der quadratischen Gleichung:

$$1x^2 - 1x - 6$$

Die restliche Gleichung lautet also:

$$1x^2 - 1x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Alternative: Polynomdivision

Alternativ zum Horner-Schema kann man auch eine Polynomdivision durchführen.

Da $x_1 = 2$ eine Nullstelle ist, teilen wir den Term

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

durch

$$x - 2$$

Die Polynomdivision lautet:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -x^2 - 4x \\ -(-x^2 + 2x) \\ \hline -6x + 12 \\ -(-6x + 12) \\ \hline 0 \end{array} \quad : (x - 2) = x^2 - x - 6$$

Da am Ende 0 übrig bleibt, ist die Polynomdivision aufgegangen.

Auch hier erhalten wir:

$$x^2 - x - 6$$

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Durch das Horner-Schema haben wir den Term zerlegt:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

die Gleichung

$$(x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x - 2 = 0$$

oder

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Die erste Gleichung liefert wieder:

$$x_1 = 2$$

Jetzt müssen wir noch die quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel. Alternativ kann man auch die Mitternachtsformel verwenden.

Wir vergleichen mit

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -1 \quad \text{und} \quad q = -6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1 - 5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x_3 &= \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-2, 2, 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-2; 2; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -2, \quad x = 2, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-2; 2; 3\}$$