

**Aufgabe 3e: Berechne die Lösung der Gleichung**

Löse die Gleichung mit  $x \in \mathbb{R}$  und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

**Lösung**

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor  $x$  vorkommt, verwenden wir zuerst die Ausklammern-Methode. Danach wenden wir den Satz vom Nullprodukt an. Die entstehende quadratische Gleichung lösen wir anschließend mit der  $pq$ -Formel.

Alternativ zur  $pq$ -Formel kann man auch die Mitternachtsformel verwenden.

**1. Schritt: Gleichung vorbereiten**

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form  $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

**2. Schritt:  $x$  ausklammern**

Jetzt suchen wir den gemeinsamen Faktor der Summanden:

$$x^3 + 5x^2 + 6x$$

In jedem Summanden kommt ein  $x$  vor:

$$x^3 = x \cdot x^2$$

$$5x^2 = x \cdot 5x$$

$$6x = x \cdot 6$$

Deshalb klammern wir  $x$  aus:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

die Gleichung

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0$$

**Merke**

Wenn in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, kann man diesen Faktor ausklammern. Hier ist der gemeinsame Faktor:

$$x$$

Dadurch entsteht eine Produktform. Dann kann man den Satz vom Nullprodukt anwenden.

**3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden**

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x = 0$$

oder

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Die erste Gleichung liefert direkt:

$$x_1 = 0$$

Jetzt müssen wir noch die quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

**4. Schritt:  $pq$ -Formel anwenden**

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der  $pq$ -Formel.

Wir vergleichen mit

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = 5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

Die  $pq$ -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\ x_3 &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

**Alternative: Mitternachtsformel**

Alternativ kann man die quadratische Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-5 - 1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\ x_3 &= \frac{-5 + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

**5. Schritt: Lösungsmenge angeben**

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, -2, 0$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; -2; 0\}$$

**Ergebnis**

Die Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3, \quad x = -2, \quad x = 0$$

Also gilt:

$$L = \{-3; -2; 0\}$$