

Aufgabe 4a: Berechne die Schnittstellen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

und

$$g(x) = 2x - 5$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Stellen, an denen beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.
Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5$$

Diese Gleichung formen wir in die Form

$$\text{Term} = 0$$

um und lösen sie anschließend mit der pq -Formel.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \quad | + 5$$

$$x^2 - 3x + 6 = 2x \quad | - 2x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Unsere Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Vor x^2 steht bereits der Faktor 1.

Die Gleichung ist also schon normiert. Wir müssen hier nichts mehr teilen.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{2; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Damit schneiden sich die Funktionen bei den Stellen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{2; 3\}$$