

Aufgabe 4b: Berechne die Schnittstellen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 1$$

und

$$g(x) = -x^2 + 9$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Eine Schnittstelle ist der x -Wert, an dem beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

Diese Gleichung lösen wir nach x auf. Die gefundenen x -Werte sind die gesuchten Schnittstellen.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Schnittstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind nur die x -Werte.

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen wir später nur als Zusatz. Für die eigentliche Aufgabe wäre das nicht nötig gewesen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9 \quad | -9$$

$$x^2 - 8 = -x^2 \quad | +x^2$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$2x^2 - 8 = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Nach x^2 auflösen

Jetzt lösen wir die Gleichung nach x^2 auf.

Aus

$$2x^2 - 8 = 0$$

machen wir:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad | +8$$

$$2x^2 = 8 \quad | :2$$

$$x^2 = 4$$

Damit haben wir die Gleichung auf die Form

$$x^2 = 4$$

gebracht.

Merke

Wenn du eine Gleichung der Form

$$x^2 = a$$

hast, musst du beim Wurzelziehen beide Lösungen beachten:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Das bedeutet: Es kann eine positive und eine negative Lösung geben.

3. Schritt: Beide Wurzeln beachten

Aus

$$x^2 = 4$$

ziehen wir die Wurzel.

$$x^2 = 4 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Also erhalten wir zwei Schnittstellen:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Schnittstellen sind:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die Lösungsmenge der Schnittstellen lautet daher:

$$L = \{-2; 2\}$$

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Gesucht waren nur die Schnittstellen, also die x -Werte:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Schnittpunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.

Dazu setzen wir die gefundenen x -Werte in eine der beiden Funktionen ein. Wir verwenden hier:

$$g(x) = -x^2 + 9$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} g(-2) &= -(-2)^2 + 9 \\ &= -4 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Also wäre der erste Schnittpunkt:

$$S_1(-2 \mid 5)$$

Für $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} g(2) &= -(2)^2 + 9 \\ &= -4 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Also wäre der zweite Schnittpunkt:

$$S_2(2 \mid 5)$$

Ergebnis

Die gesuchten Schnittstellen sind:

$$\boxed{x = -2} \quad \text{und} \quad \boxed{x = 2}$$

Also gilt:

$$\boxed{L = \{-2; 2\}}$$

Zusatz: Die zugehörigen Schnittpunkte wären

$$S_1(-2 \mid 5) \quad \text{und} \quad S_2(2 \mid 5)$$