

Aufgabe 4c: Berechne die Schnittstellen

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

und

$$g(x) = 6x$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Eine Schnittstelle ist der x -Wert, an dem beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$x^3 - 3x = 6x$$

Diese Gleichung bringen wir zuerst in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Danach klammern wir die kleinste Potenz aus und verwenden den Satz vom Nullprodukt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Schnittstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind nur die x -Werte.

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen wir später nur als Zusatz. Für die eigentliche Aufgabe wäre das nicht nötig gewesen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$x^3 - 3x = 6x$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$x^3 - 3x = 6x \quad | - 6x$$

$$x^3 - 9x = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^3 - 9x = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Kleinste Potenz ausklammern

Jetzt suchen wir den gemeinsamen Faktor der beiden Summanden:

$$x^3 - 9x$$

In beiden Summanden kommt ein x vor:

$$x^3 = x \cdot x^2$$

und

$$-9x = x \cdot (-9)$$

Deshalb klammern wir x aus:

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 - 9x = 0$$

die Gleichung

$$x(x^2 - 9) = 0$$

Merke

Wenn in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, kann man diesen Faktor ausklammern. Hier ist der gemeinsame Faktor:

$$x$$

Dadurch entsteht eine Produktform. Dann können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden.

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x(x^2 - 9) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x = 0$$

oder

$$x^2 - 9 = 0$$

Die erste Gleichung liefert direkt:

$$x_1 = 0$$

Jetzt lösen wir noch die zweite Gleichung:

$$x^2 - 9 = 0$$

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Die erste Gleichung ist:

$$x = 0$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 0$$

Die zweite Gleichung lautet:

$$x^2 - 9 = 0$$

Wir lösen nach x^2 auf:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 & | +9 \\ x^2 &= 9 \end{aligned}$$

Jetzt ziehen wir die Wurzel und beachten beide Lösungen:

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 & | \sqrt{} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = -3 \quad \text{und} \quad x_3 = 3$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Schnittstellen sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, 0, 3$$

Die Lösungsmenge der Schnittstellen lautet daher:

$$L = \{-3; 0; 3\}$$

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Gesucht waren nur die Schnittstellen, also die x -Werte:

$$x = -3, \quad x = 0, \quad x = 3$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Schnittpunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.

Dazu setzen wir die gefundenen x -Werte in eine der beiden Funktionen ein. Wir verwenden hier:

$$g(x) = 6x$$

Für $x_1 = -3$:

$$\begin{aligned} g(-3) &= 6 \cdot (-3) \\ &= -18 \end{aligned}$$

Also wäre der erste Schnittpunkt:

$$S_1(-3 \mid -18)$$

Für $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 6 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also wäre der zweite Schnittpunkt:

$$S_2(0 \mid 0)$$

Für $x_3 = 3$:

$$\begin{aligned} g(3) &= 6 \cdot 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Also wäre der dritte Schnittpunkt:

$$S_3(3 \mid 18)$$

Ergebnis

Die gesuchten Schnittstellen sind:

$$x = -3$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 0; 3\}$$

Zusatz: Die zugehörigen Schnittpunkte wären

$$S_1(-3 \mid -18), \quad S_2(0 \mid 0), \quad S_3(3 \mid 18)$$