

**Aufgabe 4d: Berechne die Schnittstellen**

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 2x^2 + x$$

und

$$g(x) = x^2 + 7x - 8$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

**Lösung**

Gesucht sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Eine Schnittstelle ist der  $x$ -Wert, an dem beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$2x^2 + x = x^2 + 7x - 8$$

Diese Gleichung formen wir in die Form

$$\text{Term} = 0$$

um und lösen sie anschließend mit der  $pq$ -Formel.

**Wichtiger Hinweis**

In dieser Aufgabe sind nur die Schnittstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind nur die  $x$ -Werte.

Die  $y$ -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen wir später nur als Zusatz. Für die eigentliche Aufgabe wäre das nicht nötig gewesen.

**1. Schritt: Gleichung vereinfachen**

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$2x^2 + x = x^2 + 7x - 8$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$2x^2 + x = x^2 + 7x - 8 \quad | - x^2$$

$$x^2 + x = 7x - 8 \quad | - 7x$$

$$x^2 - 6x = -8 \quad | + 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form  $\text{Term} = 0$ ,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

**2. Schritt: Wenn nötig normieren**

Für die  $pq$ -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Unsere Gleichung lautet:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Vor  $x^2$  steht bereits der Faktor 1.

Die Gleichung ist also schon normiert. Wir müssen hier nichts mehr teilen.

**Merke**

Die  $pq$ -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor  $x^2$  muss der Faktor 1 stehen.

**3. Schritt:  $p$  und  $q$  bestimmen**

Die Gleichung lautet:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -6 \quad \text{und} \quad q = 8$$

**4. Schritt:  $pq$ -Formel anwenden**

Die  $pq$ -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = -6 \quad \text{und} \quad q = 8$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8} \\ &= 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8} \\ &= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\ &= 3 \pm \sqrt{1} \\ &= 3 \pm 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 = 3 + 1 = 4$$

**Alternative: Mitternachtsformel**

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 8$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 2}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

**5. Schritt: Lösungsmenge angeben**

Die beiden Schnittstellen sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Die Lösungsmenge der Schnittstellen lautet daher:

$$L = \{2; 4\}$$

**Wichtiger Hinweis**

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Gesucht waren nur die Schnittstellen, also die  $x$ -Werte:

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 4$$

Die passenden  $y$ -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

**Zusatz:  $y$ -Koordinaten berechnen**

Für die Schnittpunkte brauchen wir zusätzlich die passenden  $y$ -Werte.

Dazu setzen wir die gefundenen  $x$ -Werte in eine der beiden Funktionen ein. Wir verwenden hier:

$$f(x) = 2x^2 + x$$

Für  $x_1 = 2$ :

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^2 + 2 \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \\ &= 8 + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Also wäre der erste Schnittpunkt:

$$S_1(2 \mid 10)$$

Für  $x_2 = 4$ :

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \cdot 4^2 + 4 \\ &= 2 \cdot 16 + 4 \\ &= 32 + 4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Also wäre der zweite Schnittpunkt:

$$S_2(4 \mid 36)$$

**Ergebnis**

Die gesuchten Schnittstellen sind:

$$\boxed{x = 2} \quad \text{und} \quad \boxed{x = 4}$$

Also gilt:

$$\boxed{L = \{2; 4\}}$$

Zusatz: Die zugehörigen Schnittpunkte wären

$$S_1(2 \mid 10) \quad \text{und} \quad S_2(4 \mid 36)$$