

# Ganzrationale Funktionen ableiten

## Summenregel, Differenzregel und Potenzregel sicher anwenden

Leite jeden Summanden einzeln ab und achte dabei auf Vorzahl und Hochzahl.

### Was bedeutet Ableiten?

Die Ableitung  $f'(x)$  beschreibt die **Steigung** des Funktionsgraphen von  $f$ . Bei ganzrationalen Funktionen kannst du die einzelnen Summanden nacheinander ableiten.

### 1. Summenregel und Differenzregel

Mathematisch:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Einfach gesagt:

**Alles, was durch ein + oder durch ein – getrennt ist, wird einzeln abgeleitet.** Das Rechenzeichen zwischen den Summanden bleibt dabei erhalten.

### Beispiel zur Summen- und Differenzregel

Die Funktion besteht aus vier Summanden:

$$f(x) = \underbrace{3x^4}_{1. \text{ Summand}} \underbrace{-5x^2}_{2. \text{ Summand}} \underbrace{+2x}_{3. \text{ Summand}} \underbrace{-7}_{4. \text{ Summand}}$$

Jeder dieser vier Summanden wird einzeln abgeleitet.

### 2. Potenzregel mit Koeffizient

Ausgangsterm:

$$f(x) = c \cdot x^n$$

Ableitung:

$$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Mathematisch gesprochen:

Koeffizient · Exponent ·  $x^{\text{Exponent}-1}$

Umgangssprachlich:

Vorzahl · Hochzahl ·  $x^{\text{Hochzahl}-1}$

### Beispiel zur Potenzregel

$$f(x) = 4x^5$$

$$f'(x) = \underbrace{4}_{\text{Vorzahl}} \cdot \underbrace{5}_{\text{Hochzahl}} \cdot x^{\overbrace{5-1}^{\text{Hochzahl}-1}} = 20x^4$$

### Kurzform zum Einprägen

**Vorzahl mal Hochzahl – Hochzahl minus eins**

# Zwei wichtige Sonderfälle

## Reine Zahlen und Terme der Form Zahl mal $x$

### Sonderfall 1: Eine reine Zahl wird zu 0

Für eine konstante Funktion, zum Beispiel

$$f(x) = 7,$$

ist der Funktionswert an jeder Stelle gleich. Der Graph ist eine waagerechte Gerade und besitzt überall die Steigung 0. Deshalb gilt:

$$f(x) = 7 \quad \implies \quad f'(x) = 0$$

Man sagt im Unterricht häufig: „**Die reine Zahl fällt beim Ableiten weg.**“ Mathematisch bedeutet das aber nicht, dass sie einfach verschwindet, sondern dass ihre Ableitung 0 ist.

### Warum darf man sagen, die Zahl „fällt weg“?

Betrachte die Funktion

$$f(x) = 3x^2 + 7.$$

Wir leiten beide Summanden einzeln ab:

$$f'(x) = 6x + 0 = 6x.$$

Die  $+0$  verändert das Ergebnis nicht. Deshalb wird sie normalerweise nicht mehr mitgeschrieben – die reine Zahl „fällt weg“.

### Sonderfall 2: Zahl mal $x$ wird zur Zahl vor $x$

Ein  $x$  ohne sichtbare Hochzahl besitzt die Hochzahl 1:

$$5x = 5x^1.$$

Nun wenden wir die Potenzregel an:

$$5x^1 \implies 5 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 5x^0 = 5 \cdot 1 = 5.$$

Also gilt allgemein:

$$f(x) = c \cdot x \implies f'(x) = c$$

### Merksätze

- Eine **reine Zahl** wird beim Ableiten zu 0 und wird im Endergebnis nicht mehr mitgeschrieben.
- Bei **Zahl mal  $x$**  bleibt nach dem Ableiten genau die Zahl stehen, die vor  $x$  stand.
- Ein einzelnes  $x$  wird deshalb zu 1, denn  $x = 1 \cdot x$ .

# Der feste Vier-Schritte-Plan

## So leitest du ganzrationale Funktionen zuverlässig ab

### 1 Summanden erkennen

Markiere gedanklich alle Teile, die durch ein + oder ein – voneinander getrennt sind. Jeder Summand wird einzeln abgeleitet.

### 2 Vorzahl mit Hochzahl multiplizieren

Bei jedem Potenzterm multiplizierst du den Koeffizienten mit dem Exponenten.

$$c \cdot x^n \implies c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

### 3 Hochzahl um 1 verringern

Ziehe von der bisherigen Hochzahl 1 ab. Das Rechenzeichen vor dem Summanden bleibt erhalten.

### 4 Sonderfälle vereinfachen

- Eine reine Zahl wird zu 0 und fällt im Endergebnis weg.
- Bei Zahl mal  $x$  bleibt die Zahl vor  $x$  stehen.
- Schreibe  $x^1 = x$  und  $x^0 = 1$  nicht unnötig mit.

## Vollständiges Beispiel

Gegeben ist

$$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7.$$

### 1. Jeden Summanden einzeln ableiten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} - 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 0 \\ &= 12x^3 - 10x + 2x^0 \\ &= 12x^3 - 10x + 2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$$

## Typische Fehler vermeiden

- **Nur die Hochzahl verringert:**  $(4x^5)' \neq 4x^4$ . Richtig ist  $(4x^5)' = 20x^4$ .
- **Vorzeichen verloren:**  $(-3x^2)' = -6x$ , nicht  $+6x$ .
- **Reine Zahl stehen gelassen:**  $(x^2 + 4)' = 2x$ , nicht  $2x + 4$ .
- **$x$  zu 0 gemacht:**  $(5x)' = 5$ . Nur eine reine Zahl wird zu 0.

# Üben und kontrollieren

## Leite die Funktionen vollständig ab

### Aufgaben

a)  $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x - 9$

b)  $g(x) = -2x^4 + 7x^2 - 3$

c)  $h(x) = \frac{1}{2}x^6 - 3x + 8$

d)  $p(x) = x^7 - x^2 + x - 12$

### Kontrolliere dich vor der Lösung

- Habe ich alles, was durch + oder – getrennt ist, einzeln abgeleitet?
- Habe ich Vorzahl und Hochzahl miteinander multipliziert?
- Habe ich jede Hochzahl um 1 verringert?
- Habe ich reine Zahlen zu 0 abgeleitet?
- Habe ich bei Zahl mal  $x$  die Zahl vor  $x$  stehen gelassen?

### Lösungen

a)  $f'(x) = 6 \cdot 5x^{5-1} - 4 \cdot 3x^{3-1} + 2 = \boxed{30x^4 - 12x^2 + 2}$

b)  $g'(x) = -2 \cdot 4x^{4-1} + 7 \cdot 2x^{2-1} = \boxed{-8x^3 + 14x}$

c)  $h'(x) = \frac{1}{2} \cdot 6x^{6-1} - 3 = \boxed{3x^5 - 3}$

d)  $p'(x) = 7x^6 - 2x + 1 = \boxed{7x^6 - 2x + 1}$

### Das Wichtigste auf einen Blick

$$c \cdot x^n \longrightarrow c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$c \cdot x \longrightarrow c$$

$$c \longrightarrow 0$$

**In Worten:** Alles, was durch + oder – getrennt ist, wird einzeln abgeleitet.