

Aufgabe 5a: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Da nur x^4 , x^2 und eine reine Zahl vorkommen, liegt eine biquadratische Gleichung vor. Deshalb verwenden wir die Substitution

$$x^2 = z$$

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Kleinste Potenz = z

Bei der Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

kommen die Potenzen

$$x^4 \quad \text{und} \quad x^2$$

vor.

Dabei gilt:

$$x^4 = x^2 \cdot x^2$$

Deshalb setzen wir:

$$x^2 = z$$

Dann gilt automatisch:

$$x^4 = z^2$$

Damit wird aus der ursprünglichen Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

die neue Gleichung

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

Merke

Bei einer biquadratischen Gleichung ersetzt man meistens:

$$x^2 = z$$

Dann wird aus

$$x^4$$

der Ausdruck

$$z^2$$

So entsteht aus einer Gleichung mit x^4 eine quadratische Gleichung in z .

3. Schritt: Neue Gleichung lösen

Jetzt lösen wir die neue Gleichung:

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel.

Wir vergleichen mit:

$$z^2 + pz + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -10 \quad \text{und} \quad q = 9$$

Die pq -Formel lautet:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{25 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{16} \\ &= 5 \pm 4 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$z_1 = 5 - 4 = 1$$

$$z_2 = 5 + 4 = 9$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 9$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 8}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{10 - 8}{2} = 1 \\ z_2 &= \frac{10 + 8}{2} = 9 \end{aligned}$$

4. Schritt: $z = \text{kleinste Potenz}$

Jetzt gehen wir zurück zur Substitution.

Wir hatten gesetzt:

$$x^2 = z$$

Also gilt für

$$z_1 = 1$$

die Gleichung:

$$x^2 = 1$$

Und für

$$z_2 = 9$$

die Gleichung:

$$x^2 = 9$$

5. Schritt: Wenn möglich Wurzel ziehen

Jetzt lösen wir beide Gleichungen.

Zuerst:

$$x^2 = 1$$

Wir ziehen die Wurzel und beachten beide Lösungen:

$$x^2 = 1 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm 1$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Nun:

$$x^2 = 9$$

Auch hier ziehen wir die Wurzel und beachten beide Lösungen:

$$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm 3$$

Damit erhalten wir:

$$x_3 = -3 \quad \text{und} \quad x_4 = 3$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die vier Lösungen sind:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, -1, 1, 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; -1; 1; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

hat die Nullstellen

$$x = -3, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; -1; 1; 3\}$$