

Aufgabe 5c: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 12x^2$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$3x^3 - 12x^2 = 0$$

Da in beiden Summanden die kleinste Potenz x^2 vorkommt, verwenden wir die Ausklammern-Methode. Danach wenden wir den Satz vom Nullprodukt an.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$3x^3 - 12x^2 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Kleinste Potenz ausklammern

Jetzt suchen wir die kleinste Potenz, die in beiden Summanden vorkommt:

$$3x^3 - 12x^2$$

In beiden Summanden kommt x^2 vor:

$$3x^3 = x^2 \cdot 3x$$

und

$$-12x^2 = x^2 \cdot (-12)$$

Deshalb klammern wir x^2 aus:

$$3x^3 - 12x^2 = x^2(3x - 12)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$3x^3 - 12x^2 = 0$$

die Gleichung

$$x^2(3x - 12) = 0$$

Merke

Beim Ausklammern kann man sich zuerst auf die kleinste Potenz konzentrieren.
Hier ist die kleinste Potenz:

$$x^2$$

Dadurch entsteht eine Produktform. Dann können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden.

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x^2(3x - 12) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x^2 = 0$$

oder

$$3x - 12 = 0$$

Jetzt lösen wir beide Gleichungen einzeln.

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Die erste Gleichung lautet:

$$x^2 = 0$$

Wir lösen nach x auf:

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$x = 0$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 0$$

Die zweite Gleichung lautet:

$$3x - 12 = 0$$

Wir lösen nach x auf:

$$3x - 12 = 0 \quad | + 12$$

$$3x = 12 \quad | : 3$$

$$x = 4$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = 4$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{0; 4\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 12x^2$$

hat die Nullstellen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = 4$$

Also gilt:

$$L = \{0; 4\}$$