

Aufgabe 5d: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Da es sich um eine Gleichung dritten Grades handelt, suchen wir zuerst eine Nullstelle durch Probieren. Danach verwenden wir das Horner-Schema.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades probieren wir zuerst mögliche ganzzahlige Nullstellen. Mögliche Kandidaten sind Teiler des Absolutglieds 6:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Wir testen $x = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 \\ &= -1 - 4 - 1 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist

$$x_1 = -1$$

eine Nullstelle.

3. Schritt: Horner-Schema anwenden

Jetzt verwenden wir das Horner-Schema mit

$$x_1 = -1$$

Die Koeffizienten der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

sind:

$$1, -4, 1, 6$$

	1	-4	1	6
		$(-1) \cdot 1 =$	$(-1) \cdot (-5) =$	$(-1) \cdot 6 =$
		-1	5	-6
$x_1 = -1$	1	-5	6	0

Damit erhalten wir als neue Gleichung:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Alternative: Polynomdivision

Alternativ kann man auch eine Polynomdivision durchführen.

Da $x_1 = -1$ eine Nullstelle ist, teilen wir durch

$$x - (-1) = x + 1$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad : (x + 1) = x^2 - 5x + 6 \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 -5x^2 + x \\
 \underline{-(-5x^2 - 5x)} \\
 6x + 6 \\
 \underline{-(6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Auch hier erhalten wir:

$$x^2 - 5x + 6$$

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Nach dem Horner-Schema bleibt die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir jetzt mit der pq -Formel.

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

$$x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5 - 1}{2} = 2 \\ x_3 &= \frac{5 + 1}{2} = 3 \end{aligned}$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-1; 2; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

hat die Nullstellen

$$x = -1, \quad x = 2, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-1; 2; 3\}$$