

Aufgabe 5e: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Da es sich um eine quadratische Gleichung handelt, lösen wir sie mit der pq -Formel. Dafür müssen wir die Gleichung zuerst normieren.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Unsere Gleichung lautet:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Vor x^2 steht der Faktor 2. Deshalb teilen wir die gesamte Gleichung durch 2:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Jetzt ist die Gleichung normiert.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die normierte Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

gilt:

$$a = 2, \quad b = -10, \quad c = 12$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} \\ &= \frac{10 \pm 2}{4} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 &= \frac{10 + 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{2; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

hat die Nullstellen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{2; 3\}$$